

◀ 2017年 京都工芸繊維大学 (前期) ▶

♠ 工学科学部

1 s, t を $0 < s < 1, 0 < t < 1$ を満たす実数とする. xy 平面において, 原点 $O(0, 0)$, 点 $A(p, q)$ ($q > 0$) および点 $B(1, 0)$ を頂点とする三角形 OAB を考える. 線分 AO を $s : (1-s)$ の比に内分する点を C とし, 線分 AB を $t : (1-t)$ の比に内分する点を D とする. 点 A から直線 CD に下ろした垂線を AH とし, 線分 AH の長さを h とおく. また, 線分 CD の長さを l とおく.

(1) $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$ とする. ベクトル \vec{CD} を s, t および \vec{a}, \vec{b} を用いて表せ.

(2) h を s, t, q および l を用いて表せ. また, l を s, t, p, q を用いて表せ.

(3) s, t および q を固定する. p が実数全体を動くときの h の最大値を求めよ.

2 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta \quad \left(0 < x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

により定める. $0 < t < \frac{\pi}{2}$ を満たす実数 t に対し, xy 平面における曲線 $y = f(x)$ ($t \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) の長さを $l(t)$ とおく.

(1) 極限 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$ を求めよ.

(2) $l(t)$ を求めよ.

(3) 極限 $\lim_{t \rightarrow +0} (l(t) - f(t))$ を求めよ.

3 a を正の実数とし, n を自然数とする. i を虚数単位とし, 複素数 $z_n = 1 + \frac{a}{n}i$ を考え, $r_n = |z_n|$, $\theta_n = \arg z_n$ ($0 < \theta_n < \frac{\pi}{2}$) とおく. このとき次の問いに答えよ. ただし, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき不等式 $\sin x < x < \tan x$

が成り立つことを証明なしに用いてよい.

(1) 関数 $f(x) = \frac{x}{\tan x}$ の $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲における増減を調べよ.

(2) 不等式 $n\theta_n < (n+1)\theta_{n+1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを示せ.

(3) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n\theta_n$ および $\lim_{n \rightarrow \infty} (r_n)^n$ を求めよ.

4 n を 2 以上の自然数とする. n 個の実数 a_1, a_2, \dots, a_n が条件 $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ を満たすとする. b_1, b_2, \dots, b_n は n 個の数 a_1, a_2, \dots, a_n をすべて並べた順列であり, 順列 a_1, a_2, \dots, a_n とは異なるとする.

(1) 実数 p_1, p_2, q_1, q_2 が $p_1 < p_2$ および $q_1 < q_2$ を満たすとき, 不等式

$$p_1q_2 + p_2q_1 < p_1q_1 + p_2q_2$$

が成り立つことを示せ.

(2) $b_i > b_j$ を満たす 2 つの自然数 i, j ($1 \leq i < j \leq n$) が存在することを示せ.

(3) n 個の数 a_1, a_2, \dots, a_n をすべて並べた順列 c_1, c_2, \dots, c_n で, 不等式

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k < \sum_{k=1}^n a_k c_k$$

を満たすものが存在することを示せ.

出題範囲と難易度**♣ 工学科学部**

- 1** | 分析中 | **B** ベクトル (平面)
- 2** | 分析中 | **III** 極限・積分法の応用
- 3** | 分析中 | **III** 複素数平面・極限
- 4** | 分析中 | **II** 不等式の証明・**B** 数列

⇒注: 出題範囲は分析中のため変更される場合があります.