

◀2015年 京都大学(前期)▶

♠ 理系学部

1 2つの関数 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right)$ と $y = \sin 2x$ のグラフの $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の部分で囲まれる領域を、 x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を求めよ。ただし、 $x = 0$ と $x = \frac{\pi}{2}$ は領域を囲む線とは考えない。

2 次の2つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものの面積を求めよ。

(a) 少なくとも2つの内角は 90° である。

(b) 半径1の円が内接する。ただし、円が四角形に内接するとは、円が四角形の4つの辺すべてに接することをいう。

3

(1) a を実数とすると、 $(a, 0)$ を通り、 $y = e^x + 1$ に接する直線がただ1つ存在することを示せ。

(2) $a_1 = 1$ として、 $n = 1, 2, \dots$ について、 $(a_n, 0)$ を通り、 $y = e^x + 1$ に接する直線の接点の x 座標を a_{n+1} とする。このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n)$ を求めよ。

4 一辺の長さが1の正四面体 $ABCD$ において、 P を辺 AB の中点とし、点 Q が辺 AC 上を動くとする。このとき、 $\cos \angle PDQ$ の最大値を求めよ。

5 a, b, c, d, e を正の実数として整式

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$g(x) = dx + e$$

を考える。すべての正の整数 n に対して $\frac{f(n)}{g(n)}$ は整数であるとする。このとき、 $f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ。

6 2つの関数を

$$f_0(x) = \frac{x}{2}, \quad f_1(x) = \frac{x+1}{2}$$

とおく。 $x_0 = \frac{1}{2}$ から始め、各 $n = 1, 2, \dots$ について、それぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で $x_n = f_0(x_{n-1})$ または $x_n = f_1(x_{n-1})$ と定める。このとき、 $x_n < \frac{2}{3}$ となる確率 P_n を求めよ。

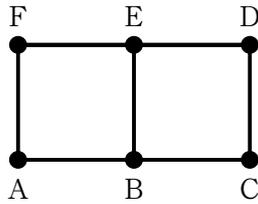
♠ 文系学部

1 直線 $y = px + q$ が、 $y = x^2 - x$ のグラフとは交わるが、 $y = |x| + |x - 1| + 1$ のグラフとは交わらないような (p, q) の範囲を図示し、その面積を求めよ。

2 理系学部 **2** と同じ。

3 6個の点 A, B, C, D, E, F が下図のように長さ1の線分で結ばれているとする。各線分をそれぞれ独立に確率 $\frac{1}{2}$ で赤または黒で塗る。赤く塗られた線分だけを通して点 A から点 E に至る経路がある場合はそのうちで最短のものの長さを X とする。そのような経路がない場合は X を0とする。このとき、 $n = 0, 2, 4$ に

ついて, $X = n$ となる確率を求めよ.



4 xyz 空間の中で, $(0, 0, 1)$ を中心とする半径 1 の球面 S を考える. 点 Q が $(0, 0, 2)$ 以外の S 上の点を動くとき, 点 Q と点 $P(1, 0, 2)$ の 2 点を通る直線 l と平面 $z = 0$ との交点を R とおく. R の動く範囲を求め, 図示せよ.

5 a, b, c, d, e を正の有理数として整式

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$g(x) = dx + e$$

を考える. すべての正の整数 n に対して $\frac{f(n)}{g(n)}$ は整数であるとする. このとき, $f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ.

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- 1** 基本 III 積分法の応用
- 2** 標準 A 平面図形・ II 最大最小
- 3** 標準 III 極限・微分法の応用
- 4** 難 B 空間図形・ III 微分法の応用
- 5** 難 I 整数問題
- 6** 難 A 確率・ B 数列

♣ 文系学部

- 1** 標準 II 微分積分
- 2** 標準 A 平面図形・ II 最大最小
- 3** 標準 A 確率
- 4** 標準 B 空間図形
- 5** 難 I 整数問題

略解

◇ 理系学部

1 $\frac{\pi}{16}$

2 4

3 (1) 証明は省略

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 1$

4 $\frac{\sqrt{7}}{3}$

5 証明は省略

6 $P_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

◇ 文系学部

1 点 (p, q) の満たす領域は右図斜線部分で、境界線は実線部分と黒丸部分は含むが、点線部分と白丸部分は含まない。

面積は、 $\frac{25}{3}$

2 理系学部 2 と同じ。

3 $X = 0$ となる確率は、 $\frac{69}{128}$

$X = 2$ となる確率は、 $\frac{7}{16}$

$X = 4$ となる確率は、 $\frac{3}{128}$

4 右図斜線部分で、境界線上の点を含む。

5 証明は省略

