◀2011 年　京都大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　次の各問に答えよ．

(1)　箱の中に，1 から 9 までの番号を 1 つずつ書いた 9 枚のカードが入っている．ただし，異なるカードには異なる番号が書かれているものとする．この箱から 2 枚のカードを同時に選び，小さいほうの数を X とする．これらのカードを箱に戻して，再び 2 枚のカードを同時に選び，小さいほうの数を Y とする．$X=Y$ である確率を求めよ．

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}(x+1)\sqrt{1-2x^2}\,dx$ を求めよ．

2　a,b,c を実数とし，O を原点とする座標平面上において，行列 $\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix}$ によって表される 1 次変換を T とする．この 1 次変換 T が 2 つの条件

（i）　点 $(1,2)$ を点 $(1,2)$ に移す

（ii）　点 $(1,0)$ と点 $(0,1)$ が T によって点 A, B にそれぞれ移るとき，△OAB の面積が $\dfrac{1}{2}$ である

を満たすとき，a,b,c を求めよ．

3　xy 平面上で，$y=x$ のグラフと $y=\left|\dfrac{3}{4}x^2-3\right|-2$ のグラフによって囲まれる図形の面積を求めよ．

4　n は 2 以上の整数であり，$\dfrac{1}{2}<a_j<1\ (j=1,2,\cdots,n)$ であるとき，不等式

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{2^{n-1}}\right)$$

が成立することを示せ．

5　xyz 空間で，原点 O を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の球面 S と 3 点 $(4,0,0),(0,4,0),(0,0,4)$ を通る平面 α が共有点を持つことを示し，点 (x,y,z) がその共有点全体の集合を動くとき，積 xyz が取り得る値の範囲を求めよ．

6　空間内に四面体 ABCD を考える．このとき，4 つの頂点 A, B, C, D を同時に通る球面が存在することを示せ．

♠ 文系学部

1　次の各問に答えよ．

(1)　辺 AB，辺 BC，辺 CA の長さがそれぞれ 12, 11, 10 の三角形 ABC を考える．∠A の 2 等分線と辺 BC の交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ．

(2)　箱の中に，1 から 9 までの番号を 1 つずつ書いた 9 枚のカードが入っている．ただし，異なるカードには異なる番号が書かれているものとする．この箱から 2 枚のカードを同時に選び，小さいほうの数を X とする．これらのカードを箱に戻して，再び 2 枚のカードを同時に選び，小さいほうの数を Y とする．$X=Y$ である確率を求めよ．

2 四面体 OABC において，点 O から 3 点 A, B, C を含む平面に下ろした垂線とその平面の交点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OC}}$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = 2$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| = 3$, $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{7}$ のとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|$ を求めよ．

3 実数 a が変化するとき，3 次関数 $y = x^3 - 4x^2 + 6x$ と直線 $y = x + a$ のグラフの交点の個数はどのように変化するか．a の値によって分類せよ．

4 xy 平面上で，連立不等式

$$\begin{cases} |x| \leqq 2, \\ y \geqq x, \\ y \leqq \left|\dfrac{3}{4}x^2 - 3\right| - 2 \end{cases}$$

を満たす領域の面積を求めよ．

5 0 以上の整数を 10 進法で表すとき，次の問いに答えよ．ただし，0 は 0 桁の数と考えることにする．また n は正の整数とする．

(1) 各桁の数が 1 または 2 である n 桁の整数を考える．それらすべての整数の総和を T_n とする．T_n を n を用いて表せ．

(2) 各桁の数が 0, 1, 2 のいずれかである n 桁以下の整数を考える．それらすべての整数の総和を S_n とする．S_n が T_n の 15 倍以上になるのは，n がいくつ以上のときか．必要があれば，$0.301 < \log_{10} 2 < 0.302$ および $0.477 < \log_{10} 3 < 0.478$ を用いてもよい．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1** |基本| $\boxed{\text{A}}$ 確率・$\boxed{\text{III}}$ 積分法
- **2** |基本| $\boxed{\text{C}}$ 1次変換
- **3** |標準| $\boxed{\text{II}}$ 微分積分
- **4** |標準| $\boxed{\text{B}}$ 数列
- **5** |標準| $\boxed{\text{II}}$ 微分積分・$\boxed{\text{B}}$ 空間座標
- **6** |やや難| $\boxed{\text{A}}$ 空間図形

♣ 文系学部

- **1** |基本| $\boxed{\text{I}}$ 図形と計量・$\boxed{\text{A}}$ 確率
- **2** |標準| $\boxed{\text{B}}$ ベクトル
- **3** |標準| $\boxed{\text{II}}$ 微分積分
- **4** |基本| $\boxed{\text{II}}$ 微分積分
- **5** |標準| $\boxed{\text{II}}$ 指数関数・対数関数

略解

◇ 理系学部

1 （1） $\dfrac{17}{108}$

（2） $\dfrac{\sqrt{2}}{16}\pi+\dfrac{\sqrt{2}}{12}+\dfrac{1}{6}$

2 $(a,\ b,\ c)=(-1,\ 0,\ 1),\ (-1,\ -4,\ 3)$

3 $\dfrac{208}{27}$

4 証明は省略

5 $\dfrac{50}{27}\leqq xyz\leqq 2$

6 証明は省略

◇ 文系学部

1 （1） $\mathrm{AD}=3\sqrt{10}$

（2） $\dfrac{17}{108}$

2 $\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|=\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$

3

$$\begin{cases} a<\dfrac{50}{27}\ \text{のとき,} & 1 \\ a=\dfrac{50}{27}\ \text{のとき,} & 2 \\ \dfrac{50}{27}<a<2\ \text{のとき,} & 3 \\ a=2\ \text{のとき,} & 2 \\ a>2\ \text{のとき,} & 1 \end{cases}$$

4 $\dfrac{64}{27}$

5 （1） $T_n=\dfrac{2^{n-1}(10^n-1)}{3}$

（2） $n\geqq 8$