◀2010 年　京都大学（前期）▶

♠ 理系学部【乙】…理・医（医）・薬・工・農・総合人間（理系）学部

1　四面体 ABCD において $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ はそれぞれ垂直であるとする．このとき，頂点 A，頂点 B および辺 CD の中点 M の 3 点を通る平面は辺 CD と直交することを示せ．

2　x を正の実数とする．座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(0,1)$, $\mathrm{B}(0,2)$, $\mathrm{P}(x,x)$ をとり，$\triangle\mathrm{APB}$ を考える．x の値が変化するとき，$\angle\mathrm{APB}$ の最大値を求めよ．

3　a を正の実数とする．座標平面において曲線 $y=\sin x\ (0\leqq x\leqq\pi)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を S とし，曲線 $y=\sin x\ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$，曲線 $y=a\cos x\ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ および x 軸で囲まれた図形の面積を T とする．このとき $S:T=3:1$ となるような a の値を求めよ．

4　$1<a<2$ とする．3 辺の長さが $\sqrt{3}$, a, b である鋭角三角形の外接円の半径が 1 であるとする．このとき a を用いて b を表せ．

5　次の問に答えよ．

(1)　n を正の整数，$a=2^n$ とする．3^a-1 は 2^{n+2} で割り切れるが 2^{n+3} では割り切れないことを示せ．

(2)　m を正の偶数とする．3^m-1 が 2^m で割り切れるならば $m=2$ または $m=4$ であることを示せ．

6　n 個のボールを $2n$ 個の箱へ投げ入れる．各ボールはいずれかの箱に入るものとし，どの箱に入る確率も等しいとする．どの箱にも 1 個以下のボールしか入っていない確率を p_n とする．このとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log p_n}{n}$ を求めよ．

♠ 理系学部【甲】…医（保健）・教育（理系）学部

1　1 から 5 までの自然数を 1 列に並べる．どの並べかたも同様の確からしさで起こるものとする．このとき 1 番目と 2 番目と 3 番目の数の和と，3 番目と 4 番目と 5 番目の数の和が等しくなる確率を求めよ．ただし，各並べかたにおいて，それぞれの数字は重複なく 1 度ずつ用いるものとする．

2　理系学部【乙】の **1** と同じ．

3　理系学部【乙】の **2** と同じ．

4　数列 $\{a_n\}$ は，すべての正の整数 n に対して $0\leqq 3a_n\leqq\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ を満たしているとする．このとき，すべての n に対して $a_n=0$ であることを示せ．

5　理系学部【乙】の **3** と同じ．

6　座標空間内で，$\mathrm{O}(0,0,0)$, $\mathrm{A}(1,0,0)$, $\mathrm{B}(1,1,0)$, $\mathrm{C}(0,1,0)$, $\mathrm{D}(0,0,1)$, $\mathrm{E}(1,0,1)$, $\mathrm{F}(1,1,1)$, $\mathrm{G}(0,1,1)$ を頂点にもつ立方体を考える．この立方体を対角線 OF を軸にして回転させて得られる回転体の体積を求めよ．

♠ 文系学部

1　次の各問に答えよ．

(1)　座標平面上で，点 $(1, 2)$ を通り傾き a の直線と放物線 $y = x^2$ によって囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする．a が $0 \leqq a \leqq 6$ の範囲を変化するとき，$S(a)$ を最小にするような a の値を求めよ．

(2)　$\triangle$ABC において AB $= 2$, AC $= 1$ とする．$\angle$BAC の二等分線と辺 BC の交点を D とする．AD $=$ BD となるとき，$\triangle$ABC の面積を求めよ．

2　座標平面上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ が $4x+y \leqq 9$, $x+2y \geqq 4$, $2x-3y \geqq -6$ の範囲を動くとき，$2x+y$, x^2+y^2 のそれぞれの最大値と最小値を求めよ．

3　理系学部【甲】の **1** と同じ．

4　点 O を中心とする正十角形において，A, B を隣接する 2 つの頂点とする．線分 OB 上に $\mathrm{OP}^2 = \mathrm{OB}\cdot\mathrm{PB}$ を満たす点 P をとるとき，OP $=$ AB が成立することを示せ．

5　座標空間内で，O$(0, 0, 0)$, A$(1, 0, 0)$, B$(1, 1, 0)$, C$(0, 1, 0)$, D$(0, 0, 1)$, E$(1, 0, 1)$, F$(1, 1, 1)$, G$(0, 1, 1)$ を頂点にもつ立方体を考える．

(1)　頂点 A から対角線 OF に下ろした垂線の長さを求めよ．

(2)　この立方体を対角線 OF を軸にして回転させて得られる回転体の体積を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部【乙】

1. 標準　$\boxed{\text{B}}$ ベクトル（空間）
2. 標準　$\boxed{\text{II}}$ 三角関数
3. 標準　$\boxed{\text{III}}$ 積分法の応用
4. 標準　$\boxed{\text{II}}$ 三角関数
5. やや難　$\boxed{\text{I}}$ 整数問題・$\boxed{\text{B}}$ 数列
6. 標準　$\boxed{\text{A}}$ 確率・$\boxed{\text{III}}$ 積分法の応用

♣ 理系学部【甲】

1. 標準　$\boxed{\text{A}}$ 確率
2. 標準　$\boxed{\text{B}}$ ベクトル（空間）
3. 標準　$\boxed{\text{II}}$ 三角関数
4. 標準　$\boxed{\text{B}}$ 数列
5. 標準　$\boxed{\text{III}}$ 積分法の応用
6. やや難　$\boxed{\text{III}}$ 積分法の応用

♣ 文系学部

1. 標準　$\boxed{\text{II}}$ 三角関数・微分積分
2. 標準　$\boxed{\text{II}}$ 図形と方程式
3. 標準　$\boxed{\text{A}}$ 確率
4. 標準　$\boxed{\text{II}}$ 三角関数
5. やや難　$\boxed{\text{III}}$ 積分法の応用

略解

◇ 理系学部【乙】

1　証明は省略

2　$\dfrac{\pi}{4}$

3　$a=\dfrac{4}{3}$

4　$b=\dfrac{a+\sqrt{12-3a^2}}{2}$

5　（1）証明は省略

（2）証明は省略

6　$\log 2-1$

◇ 理系学部【甲】

1　$\dfrac{1}{5}$

2　理系学部【乙】**1** と同じ.

3　理系学部【乙】**2** と同じ.

4　証明は省略

5　理系学部【乙】**3** と同じ.

6　$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$

◇ 文系学部

1　（1）$a=2$

（2）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2　$2x+y$ の最大値：6,　最小値：2

x^2+y^2 の最大値：$\dfrac{45}{4}$,　最小値：$\dfrac{16}{5}$

3　理系学部【甲】**1** と同じ.

4　証明は省略

5　（1）$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

（2）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$