◀2008 年　京都大学（前期）▶

♠ 理系学部【乙】…理・医（医）・薬・工・農・総合人間（理系）学部

1　直線 $y = px + q$ が関数 $y = \log x$ のグラフと共有点を持たないために p と q が満たすべき必要十分条件を求めよ．

2　正四面体 ABCD を考える．点 P は時刻 0 では頂点 A に位置し，1 秒ごとにある頂点から他の 3 頂点のいずれかに，等しい確率で動くとする．このとき，時刻 0 から時刻 n までの間に，4 頂点 A, B, C, D のすべてに点 P が現れる確率を求めよ．ただし，n は 1 以上の整数とする．

3　空間の 1 点 O を通る 4 直線で，どの 3 直線も同一平面上にないようなものを考える．このとき，4 直線のいずれとも O 以外の点で交わる平面で，4 つの交点が平行四辺形の頂点になるようなものが存在することを示せ．

4　定数 a は実数であるとする．関数 $y = |x^2 - 2|$ と $y = |2x^2 + ax - 1|$ のグラフの共有点はいくつあるか．a の値によって分類せよ．

5　次の式で与えられる底面の半径が 2，高さが 1 の円柱 C を考える．

$$C = \{(x,\ y,\ z) \mid x^2 + y^2 \leqq 4,\ \ 0 \leqq z \leqq 1\}$$

xy 平面上の直線 $y = 1$ を含み，xy 平面と 45° の角をなす平面のうち，点 $(0,\ 2,\ 1)$ を通るものを H とする．円柱 C を平面 H で二つに分けるとき，点 $(0,\ 2,\ 0)$ を含む方の体積を求めよ．

6　地球上の北緯 60° 東経 135° の地点を A，北緯 60° 東経 75° の地点を B とする．A から B に向かう 2 種類の飛行経路 R_1, R_2 を考える．R_1 は西に向かって同一緯度で飛ぶ経路とする．R_2 は地球の大円に沿った経路のうち飛行距離の短い方とする．R_1 に比べて R_2 は飛行距離が 3% 以上短くなることを示せ．ただし地球は完全な球体であるとし，飛行機は高度 0 を飛ぶものとする．また必要があれば，三角関数表（省略）を用いよ．
注：大円とは，球を球の中心を通る平面で切ったとき，その切り口にできる円のことである．

♠ 理系学部【甲】…医（保健）・教育（理系）学部

1　理系学部【乙】の **1** と同じ．

2　理系学部【乙】の **2** と同じ．

3　AB ＝ AC である二等辺三角形 ABC を考える．辺 AB の中点を M とし，辺 AB を延長した直線上に点 N を，AN : NB ＝ 2 : 1 となるようにとる．このとき ∠BCM ＝ BCN となることを示せ．ただし，点 N は辺 AB 上にはないものとする．

4　定数 a は実数であるとする．方程式

$$(x^2 + ax + 1)(3x^2 + ax - 3) = 0$$

を満たす実数 x はいくつあるか．a の値によって分類せよ．

5　理系学部【乙】の **5** と同じ．

6　空間内に原点 O を中心とし半径 1 の球面 S を考え，S 上の 2 点を $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2},\,0,\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{4},\,\dfrac{\sqrt{3}}{4},\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とする．$z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ で与えられる平面で S を切った切り口の円において，A と B を結ぶ弧のうち短い方の長さを l_1 とする．また 3 点 O, A, B を通る平面で S を切った切り口の円において，A と B を結ぶ弧のうち短い方の長さを l_2 とする．このとき $l_1>l_2$ を証明せよ．

♠ 文系学部

1　実数 $a,\,b,\,c$ に対して $f(x)=ax^2+bx+c$ とする．このとき

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)\{f'(x)\}^2\,dx \leqq 6\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2\,dx$$

であることを示せ．

2　理系学部【甲】の **3** と同じ．

3　理系学部【甲】の **4** と同じ．

4　$0\leqq x<2\pi$ のとき，方程式

$$2\sqrt{2}(\sin^3 x+\cos^3 x)+3\sin x\cos x=0$$

を満たす x の個数を求めよ．

5　正 n 角形とその外接円を合わせた図形を F とする．F 上の点 P に対して，始点と終点がともに P であるような，図形 F の一筆がきの経路の数を $N(\mathrm{P})$ で表す．正 n 角形の頂点をひとつとって A とし，$a=N(\mathrm{A})$ とおく．また正 n 角形の辺をひとつとってその中点を B とし，$b=N(\mathrm{B})$ とおく．このとき a と b を求めよ．

注：一筆がきとは，図形をかき始めから終わりまで，筆を紙からはなさず，また同じ線上を通らずにかくことである．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部【乙】

1 |標準| III 微分法の応用

2 |やや難| A 確率

3 |やや難| B ベクトル

4 |標準| I ２次関数

5 |標準| III 積分法の応用

6 |標準| II 三角関数

♣ 理系学部【甲】

1 |標準| III 微分法の応用

2 |やや難| A 確率

3 |標準| A 平面図形

4 |標準| I ２次関数

5 |標準| III 積分法の応用

6 |標準| B 空間図形

♣ 文系学部

1 |標準| II 微分積分

2 |標準| A 平面図形

3 |標準| I ２次関数

4 |標準| II 三角関数・微分積分

5 |難| A 場合の数

略解

◇ 理系学部【乙】

1 $p>0$ かつ $1+q+\log p>0$

2 $1-3\left(\frac{2}{3}\right)^n+3\left(\frac{1}{3}\right)^n$

3 証明は省略

4

$$\begin{cases} a>\frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ のとき} & N=4 \\ a=\frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ のとき} & N=3 \\ 2<a<\frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ のとき} & N=4 \\ a=2 \text{ のとき} & N=3 \\ -2<a<2 \text{ のとき} & N=2 \\ a=-2 \text{ のとき} & N=3 \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2}<a<-2 \text{ のとき} & N=4 \\ a=-\frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ のとき} & N=3 \\ a<-\frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ のとき} & N=4 \end{cases}$$

5 $3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$

6 証明は省略

◇ 理系学部【甲】

1 理系学部【乙】**1** と同じ.

2 理系学部【乙】**2** と同じ.

3 証明は省略

4 理系学部【乙】**4** と同じ.

5 理系学部【乙】**5** と同じ.

6 証明は省略

◇ 文系学部

1 証明は省略

2 理系学部【甲】**3** と同じ.

3 理系学部【甲】**4** と同じ.

4 2（個）

5 $a=2^{n+1}(n+1)$,　$b=2^n(n+1)$