◀1997 年　京都大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　単位円 $C : x^2+y^2=1$ 上の点 P をとり，定点 $\mathrm{A}(-2, 0)$ から P へ線分を引き，その線分の P の側の延長線上に点 Q を $\overline{\mathrm{AP}}\cdot\overline{\mathrm{PQ}}=3$ となるようにとる．ただし，$\overline{\mathrm{AP}}$ は線分 AP の長さを表す．

(1)　$s=\overline{\mathrm{AP}},\ t=\overline{\mathrm{OQ}}$ とおいて，t を s で表せ．ただし $\mathrm{O}(0, 0)$ は原点である．

(2)　点 P が円 C 上を動くとき，点 Q の描く軌跡を求めよ．

2　n が相異なる素数 p, q の積，$n=pq$ であるとき，$(n-1)$ 個の数 ${}_n\mathrm{C}_k$ $(1 \leqq k \leqq n-1)$ の最大公約数は 1 であることを示せ．

3　2 つの放物線 $y=x^2+1$ と $y=kx^2$ $(k>1)$ で囲まれた部分の面積が第 1 の放物線上の点 $\mathrm{P}(a, a^2+1)$ における接線 L によって 2 等分されている（すなわち，L の上側にある部分の面積と下側にある部分の面積が等しい）．

(1)　a^2 を k で表せ．

(2)　$\displaystyle\lim_{k\to\infty} a^2$ を求めよ．

4

(1)　$0 \leqq \alpha < \beta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であるとき，次の不等式を示せ．

$$\int_\alpha^\beta \sin x\,dx + \int_{\pi-\beta}^{\pi-\alpha} \sin x\,dx > (\beta-\alpha)(\sin\alpha + \sin(\pi-\beta))$$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{7} \sin\frac{k\pi}{8} < \frac{16}{\pi}$ を示せ．

5　箱の中に 1 と書かれたカードと 3 と書かれたカードが合計 N 枚入れてある．1 回の試行で，箱の中からでたらめに 1 枚のカードを取り出し，その数字を見た上で，箱の中に戻す．

A, B 2 人がそれぞれ試行を 2 回または 3 回行って，その間に取り出したカードに書かれている数の合計が大きい方を勝ちとするゲームを行う．ただし，1 人が 3 回の試行を行って，取り出した数の合計が 7 または 9 の場合には，その人の得点は 0 とする規則である．

そこで A, B はそれぞれ次の作戦でゲームを行うことにした．

A ： 2 回目までの合計が 2 のときは 3 回目を行い，4 または 6 のときは 3 回目を行わない．

B ： 2 回目までの合計が 2 または 4 のときは 3 回目を行い，6 のときは 3 回目を行わない．

1 と書かれたカードの枚数を n $(0<n<N)$ とし，$p=\dfrac{n}{N}$ とする．

(1)　A の得点の期待値 E_A , B の得点の期待値 E_B をそれぞれ p で表せ．また，$E_\mathrm{A}>E_\mathrm{B}$ となるための p の条件を求めよ．

(2)　A の勝つ確率を P_A , B の勝つ確率を P_B とするとき：「$E_\mathrm{A}>E_\mathrm{B}$ ならば $P_\mathrm{A}>P_\mathrm{B}$」といえるか？

6　曲線 $y=\cos x$ の $x=t$ $\left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$ における接線と x 軸，y 軸の囲む 3 角形の面積を $S(t)$ とする．

(1)　t の関数として，$S(t)$ $\left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ．

(2)　$S(t)$ はある 1 点 $t=t_0$ で最小値をとることを示せ．また，$\dfrac{\pi}{4}<t_0<1$ を示せ．

(3)　$S(t_0)=2t_0\cos t_0$ を示せ．また，$S(t_0)>\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$ を示せ．

♠ 文系学部

1　理系学部 **1** と同じ．

2　自然数 n の約数の個数を d とする．n の約数すべてを小さい順に並べて得られる数列を $a_k\ (1\leqq k\leqq d)$ とする．したがって，$a_1=1,\ a_d=n,\ a_k<a_{k+1}\ (1\leqq k<d)$ である．このとき，n に対する次の 2 つの条件（イ），（ロ）は互いに同値 ((イ) $\Longleftrightarrow$ (ロ)) であることを示せ．

（イ）　n は 60 の倍数である．

（ロ）　n は 6 個以上の約数をもち，$\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_6}=\dfrac{1}{a_2}$ となる．

3　面積 1 の 3 角形 △ABC において，辺 AB 上に 1 点 P をとり，P を通り辺 BC に平行な直線と辺 AC の交点を Q とする．さらに線分 PQ の中点に関して A と対称な点を R とする．点 P が辺 AB 上を動くとき，△ABC と △PQR の共通部分の面積 S の最大値を求めよ．

4　2 次関数 $y=(ax+b)^2\ (0\leqq x\leqq 1)$ の最大値を $M(a,\,b)$ とする．このとき，次の不等式 $(*)$ が任意の実数 $a,\,b$ に対して成り立つような実数 m の中で最小のものを求めよ．

$$(*)\quad M(a,\,b)\leqq m\int_0^1 (ax+b)^2\,dx$$

5　理系学部 **5** と同じ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　標準　$\boxed{\text{I}}$ 三角比・$\boxed{\text{II}}$ 図形と方程式

2　やや難　$\boxed{\text{A}}$ 整数問題

3　標準　$\boxed{\text{II}}$ 微分積分・$\boxed{\text{III}}$ 関数の極限

4　標準　$\boxed{\text{III}}$ 積分法とその応用

5　標準　$\boxed{\text{I}}$ 確率

6　標準　$\boxed{\text{III}}$ 微分法とその応用・積分法とその応用

♣ 文系学部

1　標準　$\boxed{\text{I}}$ 三角比・$\boxed{\text{II}}$ 図形と方程式

2　やや難　$\boxed{\text{A}}$ 整数問題

3　標準　$\boxed{\text{I}}$ 三角比

4　標準　$\boxed{\text{II}}$ 微分積分

5　標準　$\boxed{\text{I}}$ 確率

略解

◇ 理系学部

1 （1） $t=2$

（2） 円 ： $x^2+y^2=4$ （$1 \leqq x \leqq 2$）

2 証明は省略

3 （1） $a^2=\dfrac{k}{k-1}\left\{1-\sqrt[3]{\dfrac{k}{4(k-1)}}\right\}$

（2） $\displaystyle\lim_{k\to\infty} a^2=1-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

4 （1） 証明は省略

（2） 証明は省略

5 （1） $E_{\mathrm{A}}=6-4p+3p^2-2p^3,\ E_{\mathrm{B}}=6-12p+21p^2-12p^3,\ 0<p<\dfrac{4}{5}$

（2） いえない（証明は省略）

6 （1） $S(t)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(t\sin t+\cos t)^2}{\sin t}$

（2） 証明は省略

（3） 証明は省略

◇ 文系学部

1 理系学部 **1** と同じ.

2 証明は省略

3 $\dfrac{1}{3}$

4 $m=4$

5 理系学部 **5** と同じ.