◀1995 年　京都大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換を f とする．平面上の 1 点を P，原点を O とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の f による像を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$, x 軸に垂直で点 Q を通る直線と x 軸との交点を R とする．点 P が O に一致しない範囲を動くとき，$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}$ の最大値が 2, $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}$ の最大値と最小値の比が 3 となるように a, b の値を定めよ．

2　a, b は $a>b$ をみたす自然数とし，p, d は素数で $p>2$ とする．このとき，$a^p-b^p=d$ であるならば，d を $2p$ で割った余りが 1 であることを示せ．

3　xy 平面上の 2 曲線 $C_1 : y=x^3$, $C_2 : y=ax^2+bx+c$ が相異なる 3 点で交わり，かつそれらの点で C_1 に接する 3 直線が 1 点 $\mathrm{P}(p, q)$ で交わるとする．このとき，

(1)　$a=\dfrac{3}{2}p$, $b=0$, $c=-\dfrac{1}{2}q$ であることを示せ．

(2)　p, q のみたす条件を求めよ．

4　x と y の 2 文字からなる文字列 z_n を次の規則 (イ), (ロ) で順次定めていく．

(イ)　$z_1=x$ とおく．

(ロ)　z_n の中に現れるすべての x を yx で，すべての y を xx で置き換えてできる文字列を z_{n+1} とする（$n=1, 2, 3, \cdots$）．

例えば $z_2=yx$, $z_3=xxyx$, $z_4=yxyxxxyx$ である．2 次の正方行列 A, B に対して，z_n の中の x を A で，y を B で置き換え，行列の積をつくってできる行列を C_n とする．例えば，$C_1=A$, $C_2=BA$, $C_3=AABA$（行列の積）である．

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，$n \geqq 3$ ならば $C_n=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であることを示せ．

5　1 番から 7 番まで番号のついた席が番号順に 1 列に並んでいる．客が順に到着して次のように着席していくとする．

(イ)　両端の席および先客が着席している隣の席に次の客が着席する確率は，すべて等しい．

(ロ)　両隣が空席の席に着席する確率は，隣の席にすでに先客が着席している席または端の席に着席する確率に比べて 2 倍である．

このとき，

(1)　3 人目の客が到着したときに，すでに 1 番と 3 番の席に先客が着席している確率を求めよ．

(2)　4 人目の客が到着したときに，すでに 2 番，4 番，6 番の席に先客が着席している確率を求めよ．

6　深さ h の容器がある．底は半径 $a(>0)$ の円板，側面は $x=f(y)$, $0 \leqq y \leqq h$ のグラフを y 軸のまわりに回転したものである．ただし $f(y)$ は正の連続関数で $f(0)=a$ とする．この容器に単位時間当り V（一定）の割合で水を入れたとき，T 時間後に一杯になり，しかも $t(<T)$ 時間後の水面の面積は $Vt+\pi a^2$ であった．関数 $f(y)$ を決定し，T を求めよ．

♠ 文系学部

1　理系学部 **1** と同じ．

2　数列 $\{x_n\}$ を $x_n = -an^2 + bn + c$，$n = 1, 2, 3, \cdots$ によって定める．このとき，次の 2 つの条件 (イ), (ロ) をみたす自然数 a, b, c を求めよ．

(イ)　$4, x_1, x_2$ はこの順で等差数列である．

(ロ)　すべての自然数 n に対して $\left(\dfrac{x_n + x_{n+1}}{2}\right)^2 \geqq x_n x_{n+1} + 1$ が成り立つ．

3　a, r は $a \geqq \dfrac{1}{2}$, $0<r<\dfrac{1}{2}\sqrt{4a-1}$ をみたす定数とする．
円 $x^2 + (y-a)^2 = r^2$ の接線と放物線 $y = x^2$ で囲まれる図形の面積の最小値を a と r で表せ．

4　点 $(1, 1)$ を通るだ円 E：$E = \left\{(x, y) \,\middle|\, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\right\}$ $(a, b>0)$ を 1 次変換 $f = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で移した集合を C とする．

(1)　$|t|<2$ ならば，直線 $x = t$ は異なる 2 点 A_1, A_2 で C と交わることを示せ．

(2)　$|t|<2$, $t^2 \fallingdotseq b^2$ とする．(1) の A_1, A_2 とそれぞれ同じ y 座標をもつ点 B_1, B_2 $(\mathrm{B}_1 \fallingdotseq \mathrm{A}_1, \mathrm{B}_2 \fallingdotseq \mathrm{A}_2)$ が C 上にあることを示し，線分の長さの比 $\dfrac{\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2}{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}$ を求めよ．

5　理系学部 **5** と同じ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　標準　代幾　1 次変換

2　やや難　I　整数問題

3　標準　基解　微分積分

4　やや難　基解　数列・代幾　行列

5　標準　確統　確率

6　標準　微積　積分法の応用

♣ 文系学部

1　標準　代幾　1 次変換

2　標準　基解　数列

3　標準　基解　微分積分

4　標準　代幾　1 次変換

5　標準　確統　確率

略解

◇ 理系学部

1　$a = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}},\ b = \pm\dfrac{4}{\sqrt{7}}$（複号任意）

2　証明は省略

3　(1)　証明は省略

(2)　$q(q - p^3) < 0$

4　証明は省略

5　(1)　$\dfrac{3}{80}$

(2)　$\dfrac{25}{324}$

6　$f(y) = ae^{\frac{y}{2}},\ T = \dfrac{\pi a^2(e^h - 1)}{V}$

◇ 文系学部

1　理系学部 **1** と同じ.

2　$a = 1,\ b = 1,\ c = 2$

3

$$\begin{cases} r \geqq \dfrac{1}{2} \text{ のとき} & \dfrac{1}{6}(4a - 1 - 4r^2)^{\frac{3}{2}} \\ 0 < r \leqq \dfrac{1}{2} \text{ のとき} & \dfrac{4}{3}(a - r)^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

4　(1)　証明は省略

(2)　$\sqrt{5}$

5　理系学部 **5** と同じ.