◀2012 年　熊本大学（前期）▶

♠ 理系学部

注：医学部（医）は，**1**〜**4** 必答．理学部・工学部・薬学部・医学部（保技）は，**5**〜**8** 必答．

1　$n \geqq 4$ とする．$(n-4)$ 個の 1 と 4 個の -1 からなる数列 a_k $(k=1, 2, \cdots, n)$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1)　このような数列 $\{a_k\}$ は何通りあるか求めよ．

(2)　数列 $\{a_k\}$ の初項から第 k 項までの積を $b_k = a_1 a_2 \cdots a_k$ $(k=1, 2, \cdots, n)$ とおく．$b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ がとり得る値の最大値および最小値を求めよ．

(3)　$b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ の最大値および最小値を与える数列 $\{a_k\}$ はそれぞれ何通りあるか求めよ．

2　実数 c に対して，行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

で表される 1 次変換を T とするとき，以下の問いに答えよ．

(1)　xy 平面上の同一直線上にない 3 点 P, Q, R が T によってそれぞれ P′, Q′, R′ に移るとする．三角形 P′Q′R′ の面積が三角形 PQR の面積の k 倍 $(k \geqq 1)$ となる c の値を求めよ．

(2)　楕円

$$E : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

上の点が T によって楕円 E' 上の点に移るとする．楕円 E' 上のすべての点が楕円 E の周上または外部にあるための，c の条件を求めよ．

3　正の定数 a に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin t - ax \cos t|\, dt$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1)　$f(x)$ を求めよ．

(2)　$f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ．

4　一辺の長さが $\sqrt{2}$ の正四面体 OABC において，辺 AB の中点を M，辺 BC を 1 : 2 に内分する点を N，辺 OC の中点を L とする．$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．以下の問いに答えよ．

(1)　3 点 L, M, N を通る平面と直線 OA の交点を D とする．$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ．

(2)　辺 OB の中点 K から直線 DN 上の点 P へ垂線 KP を引く．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ．

5　以下の問いに答えよ．

(1)　k を整数とするとき，x の方程式 $x^2 - k^2 = 12$ が整数解をもつような k の値をすべて求めよ．

(2)　x の方程式 $(2a-1)x^2 + (3a+2)x + a + 2 = 0$ が少なくとも 1 つ整数解をもつような整数 a の値とそのときの整数解をすべて求めよ．

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto

6　実数 c に対して，行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

で表される 1 次変換を T とするとき，以下の問いに答えよ．

(1)　T は原点の回りの回転移動と原点中心の拡大（相似変換）との合成変換であることを示せ．

(2)　xy 平面上の同一直線上にない 3 点 P, Q, R が T によってそれぞれ P′, Q′, R′ に移るとする．三角形 P′Q′R′ の面積が三角形 PQR の面積の 2 倍となる c の値を求めよ．

(3)　$c=2$ とする．楕円

$$E : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

上の点が T によって楕円 E' 上の点に移るとする．E が E' の内部にあることを示し，E' の内部にあり E の外部にある部分の面積を求めよ．

7　2 つの関数 $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^t(\sin t + \cos t)\,dt$ と $g(x) = \displaystyle\int_0^x e^t(\cos t - \sin t)\,dt$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　$f(x)$ と $g(x)$ を求めよ．

(2)　$f^{(n)}(x)$ と $g^{(n)}(x)$ をそれぞれ $f(x)$ と $g(x)$ の第 n 次導関数とする．

(i)　$n \geqq 2$ のとき，$f^{(n)}(x)$ および $g^{(n)}(x)$ を，$f^{(n-1)}(x)$ と $g^{(n-1)}(x)$ を用いて表せ．

(ii)　$\{f^{(n)}(x)\}^2 + \{g^{(n)}(x)\}^2$ を求めよ．

(iii)　実数 a について，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2a}}{\{f^{(n)}(a)\}^2 + \{g^{(n)}(a)\}^2}$ の和を求めよ．

8　関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin t - x\cos t|\,dt \quad (x>0)$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1)　$a>0$ のとき，$a=\tan\theta$ を満たす θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ に対して，$\cos\theta$ を a を用いて表せ．

(2)　$f(x)$ を求めよ．

(3)　$f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ．

♠ 文系学部・医（保看）

1　理系学部 **5** と同じ．

2　数列 $\{a_n\}$ に対して次の漸化式が成り立つとする．

$$a_1 = 1,\quad a_2 = 3,\quad a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

以下の問いに答えよ．

(1)　定数 c に対して $b_n = a_n + c$ で定められた数列 $\{b_n\}$ を考える．

$$b_{n+2} - 5b_{n+1} + 6b_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

をみたす c の値を求めよ．

(2)　a_n を n の式で表せ．

3 $f(\theta)=4\left(\sin^3\dfrac{\theta}{2}+\cos^3\dfrac{\theta}{2}\right)+6\left(\sin\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{\theta}{2}\right)(\sin\theta-2)-\sqrt{6}(\sin\theta+1)$ とおく．ただし，θ の範囲は $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{2}\pi$ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $x=\sin\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{\theta}{2}$ とおくとき，$f(\theta)$ を x のみの式で表せ．

(2) $f(\theta)$ の最小値とそのときの θ の値を求めよ．

4 定数 a は $0<a<1$ をみたすとする．曲線 $C: y=(x-1)^2$ と C 上の点 $(a, (a-1)^2)$ における接線 ℓ について，以下の問いに答えよ．

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) 曲線 C と接線 ℓ および 2 直線 $x=0$, $x=1$ とで囲まれた 2 つの部分の面積の和 $S(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ．

(3) 曲線 C と 2 直線 $x=0$, $y=0$ とで囲まれ，接線 ℓ の上側にある 2 つの部分の面積の和 $T(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1 やや難 [A] 場合の数・[B] 数列

2 やや難 [C] 行列・1次変換・いろいろな曲線

3 標準 [III] 微分法の応用・積分法

4 標準 [B] ベクトル（空間）

5 標準 [I] 整数問題・2次関数

6 標準 [C] 行列・1次変換・いろいろな曲線

7 標準 [III] 数列の極限・微分法・積分法

8 標準 [III] 積分法の応用

♣ 文系学部

1 標準 [I] 整数問題・2次関数

2 標準 [B] 数列

3 標準 [II] 三角関数・微分積分

4 標準 [II] 微分積分

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto

略解

◇ 理系学部

1 (1) $\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$（通り）

(2) $\begin{cases} \text{最大値}\quad n-4 \\ \text{最小値}\quad 4-n \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \text{最大値を与える数列は}\ \dfrac{(n-2)(n-3)}{2}\ \text{（通り）} \\ \text{最小値を与える数列は}\ n-3\ \text{（通り）} \end{cases}$

2 (1) $c=\pm\sqrt{k-1}$

(2) $c=0,\quad |c| \geqq \dfrac{3}{2}$

3 (1) $f(x)=\begin{cases} 1-ax & (x \leqq 0) \\ 2\sqrt{a^2x^2+1}-ax-1 & (x>0) \end{cases}$

(2) 最小値 ： $\sqrt{3}-1\quad \left(x=\dfrac{1}{\sqrt{3}a}\right)$

4 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{2}{3}\vec{a}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{7}{30}\vec{a}+\dfrac{13}{30}\vec{b}+\dfrac{13}{60}\vec{c}$

5 (1) $k=\pm 2$

(2) $\begin{cases} a=-2\ \text{のとき}\quad 0 \\ a=2\ \text{のとき}\quad -2 \end{cases}$

6 (1) 証明は省略

(2) $c=\pm 1$

(3) 証明は省略．8π

7 (1) $f(x)=e^x\sin x,\quad g(x)=e^x\cos x-1$

(2) (i) $f^{(n)}(x)=f^{(n-1)}(x)+g^{(n-1)}(x)\ (n \geqq 2)$，　$g^{(n)}(x)=g^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x)\ (n \geqq 2)$

(ii) 2^ne^{2x}

(iii) 1

8 (1) $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$

(2) $f(x)=2\sqrt{x^2+1}-x-1$

(3) 最小値 ： $\sqrt{3}-1\quad \left(x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

◇ 文系学部

1　　理系学部 **5** と同じ.

2　(1)　$c = -\dfrac{1}{2}$

(2)　$a_n = \dfrac{3^n - 2^n + 1}{2}$

3　(1)　$f(\theta) = 4x^3 - \sqrt{6}x^2 - 12x$

(2)　最小値 ： $-\dfrac{9\sqrt{6}}{2}$　$\left(\theta = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi\right)$

4　(1)　$y = 2(a-1)x - a^2 + 1$

(2)　最小値 ： $\dfrac{1}{12}$　$\left(a = \dfrac{1}{2}\right)$

(3)　最小値 ： $\dfrac{1}{27}$　$\left(a = \dfrac{1}{3}\right)$

Ⓒ 大学受験・数学塾　管理人：makoto