◀2011 年　熊本大学（前期）▶

♠ 理系学部

注：医学部（医）は，**1**〜**4** 必答．理学部・工学部・薬学部・医学部（保技）は，**2**, **5**, **6**, **7** 必答．

1　x, y を整数とするとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$x^5 - x$ は 30 の倍数であることを示せ．

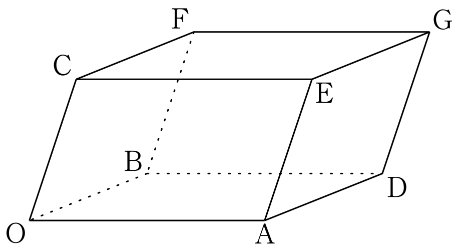
(2)　$x^5 y - x y^5$ は 30 の倍数であることを示せ．

2　平行六面体 OADB − CEGF において，辺 OA の中点を M，辺 AD を 2 : 3 に内分する点を N，辺 DG を 1 : 2 に内分する点を L とする．また，辺 OC を $k : 1-k$ $(0 < k < 1)$ に内分する点を K とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$, $\overrightarrow{\mathrm{ML}}$, $\overrightarrow{\mathrm{MK}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ．

(2)　3 点 M, N, K の定める平面上に点 L があるとき，k の値を求めよ．

(3)　3 点 M, N, K の定める平面が辺 GF と交点をもつような k の値の範囲を求めよ．



3　楕円 $C : x^2 + 4y^2 = 4$ と点 P(2, 0) を考える．以下の問いに答えよ．

(1)　直線 $y = x + b$ が楕円 C と異なる 2 つの交点をもつような b の値の範囲を求めよ．

(2)　(1) における 2 つの交点を A, B とするとき，三角形 PAB の面積が最大となるような b の値を求めよ．

4　xyz 空間内の 3 点 P(0, 0, 1), Q(0, 0, −1), R$(t, t^2 - t + 1, 0)$ を考える．t が $0 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，三角形 PQR が通過してできる立体を K とする．以下の問いに答えよ．

(1)　K を xy 平面で切ったときの断面積を求めよ．

(2)　K の体積を求めよ．

5　楕円 $C : x^2 + 4y^2 = 1$ と点 P(2, 0) を考える．以下の問いに答えよ．

(1)　直線 $y = x + b$ が楕円 C と異なる 2 つの交点をもつような b の値の範囲を求めよ．

(2)　(1) における 2 つの交点を A, B とするとき，三角形 PAB の面積が最大となるような b の値を求めよ．

6　1 個のさいころを 2 回続けて投げるとき，1 回目に出る目の数を a，2 回目に出る目の数を b とする．これらの a, b に対して，実数を要素とする集合 P, Q を次のように定める．

$$P = \{x \mid x^2 + ax + b > 0\}$$

$$Q = \{x \mid 5x + a \geqq 0\}$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　P が実数全体の集合となる確率を求めよ．

(2)　$Q \subset P$ となる確率を求めよ．

7　次の条件によって定められる関数の列 $f_n(x)$（$n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）を考える．

$$f_0(x)=1$$

$$f_n(x)=1-\int_0^x tf_{n-1}(t)\,dt \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)$ を求めよ．

(2)　$n \geqq 1$ のとき，$f_n(x)-f_{n-1}(x)$ は x についての次数が $2n$ の単項式となることを示し，その単項式を求めよ．

(3)　$n \geqq 1$ のとき，不等式

$$\frac{1}{2} \leqq f_n(1) \leqq \frac{5}{8}$$

が成り立つことを示せ．

♠ 文系学部・医（保看）

1　四角形 ABCD において，

$$\mathrm{AB}=a,\quad \mathrm{BC}=b,\quad \mathrm{CD}=c,\quad \mathrm{DA}=d,\quad \mathrm{AC}=x,\quad \mathrm{BD}=y$$

とする．以下の問いに答えよ．

(1)　$\cos A,\ \cos B,\ \cos C\ ,\ \cos D$ を $a,\ b,\ c,\ d,\ x,\ y$ を用いて表せ．

(2)　四角形 ABCD が円に内接するとき，

$$xy=ac+bd$$

が成り立つことを示せ．

2　2 つの整数の平方の和で表される整数の集合を A とする．以下の問いに答えよ．

(1)　集合 A のある要素 a^2+b^2（$a,\ b$ は整数）が 3 で割り切れるとき，$a,\ b$ はともに 3 で割り切れることを示せ．

(2)　x を整数とする．$9x$ が集合 A の要素であるとき，x は集合 A の要素であることを示せ．

3　2 つの放物線 $C_1: y=x^2,\ C_2: y=-x^2+2x-\dfrac{1}{2}$ を考える．点 $\mathrm{A}\left(t,\ -t^2+2t-\dfrac{1}{2}\right)$ における C_2 の接線を ℓ とする．以下の問いに答えよ．

(1)　ℓ と C_1 との交点の x 座標を，t を用いて表せ．

(2)　点 A の x 座標を $t=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ とするとき，第 1 象限において $\ell,\ C_1$ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

4　理系学部 **2** (1), (2) と同じ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1** 標準　I 整数問題
- **2** 標準　B ベクトル（空間）
- **3** やや難　C いろいろな曲線
- **4** 標準　III 積分法の応用
- **5** やや難　C いろいろな曲線
- **6** 標準　A 集合・確率
- **7** やや難　II 微分積分

♣ 文系学部

- **1** 標準　I 図形と計量・A 平面図形
- **2** 標準　I 整数問題
- **3** 標準　II 微分積分
- **4** 標準　B ベクトル（空間）

略解

◇ 理系学部

1 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

2 (1) $\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$,　$\overrightarrow{\mathrm{ML}} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$,　$\overrightarrow{\mathrm{MK}} = -\frac{1}{2}\vec{a} + k\vec{c}$

(2) $k = \frac{2}{9}$

(3) $\frac{2}{7} \leqq k \leqq \frac{2}{3}$

3 (1) $-\sqrt{5} < b < \sqrt{5}$

(2) $b = \frac{-1+\sqrt{11}}{2}$

4 (1) $\frac{43}{48}$

(2) $\frac{43}{72}$

5 (1) $-\frac{\sqrt{5}}{2} < b < \frac{\sqrt{5}}{2}$

(2) $b = \frac{-2+\sqrt{14}}{4}$

6 (1) $\frac{17}{36}$

(2) $\frac{2}{3}$

7 (1) $f_1(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$

$f_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4$

$f_3(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{48}x^6$

(2) 証明は省略．$\frac{x^{2n}}{(-2)^n n!}$

(3) 証明は省略

◇ 文系学部

1 (1) $\cos A = \frac{a^2+d^2-y^2}{2ad}$，　$\cos B = \frac{a^2+b^2-x^2}{2ab}$，

$\cos C = \frac{b^2+c^2-y^2}{2bc}$，　$\cos D = \frac{c^2+d^2-x^2}{2cd}$

(2) 証明は省略

2 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

3 (1) $x = \frac{-2(t-1) \pm \sqrt{8t^2-8t+2}}{2}$

(2) $\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}$

4 (1) $\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$,　$\overrightarrow{\mathrm{ML}} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$,　$\overrightarrow{\mathrm{MK}} = -\frac{1}{2}\vec{a} + k\vec{c}$

(2) $k = \frac{2}{9}$