◀2010 年　熊本大学（前期）▶

♠ 理系学部

注：医学部（医）は，**1**〜**4** 必答．理学部・医学部（保技）は，**5**〜**8** 必答．

1　原点を O とし，空間内に 3 点 A$(4,0,0)$, B$(1,2,0)$, C$(2,1,2)$ をとる．線分 BC を $t:(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点を P とおく．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$\triangle$OAP の面積を最小にする t の値を求めよ．

(2)　C を通り，3 点 O, A, P を通る平面に垂直な直線と xy 平面との交点を D とする．D が $\triangle$OAB の内部にあるとき，t の範囲を求めよ．

2　赤球 4 個と白球 6 個の入った袋から 2 個の球を同時に取り出し，その中に赤球が含まれていたら，その個数だけさらに袋から球を取り出す．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　取り出した赤球の総数が 2 である確率を求めよ．

(2)　取り出した赤球の総数が，取り出した白球の総数をこえる確率を求めよ．

3　関数 $f(x)=\displaystyle\int_x^{\frac{\pi}{4}-x}\log_4(1+\tan t)\,dt\ \left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{8}\right)$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(2)　$f(0)$ の値を求めよ．

(3)　条件 $a_1=f(0)$, $a_{n+1}=f(a_n)\ (n=1,2,3,\cdots)$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ．

4　以下の問いに答えよ．

(1)　p を 0 でない定数とする．関数 $f(x)=ae^{-x}\sin px+be^{-x}\cos px$ について，$f'(x)=e^{-x}\sin px$ となるように，定数 a, b を定めよ．

(2)　$S(t)=\displaystyle\int_0^{t^2}e^{-x}\sin\frac{x}{t}\,dx\ (t\neq 0)$ とおく．このとき，$S(t)$ を求めよ．

(3)　$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{S(t)}{t^3}$ の値を求めよ．

5　関数 $y=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x+2\sin x-2\sqrt{3}\cos x$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　$\sin x-\sqrt{3}\cos x=t$ とおいて，y を t の式で表せ．

(2)　$0\leqq x\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ のとき，y の最大値および最小値を求めよ．

6　曲線 $C:x^2+y^2=1\ (x\geqq 0,\ y\geqq 0)$ 上に 3 点 A$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, P$(1,0)$, Q$(0,1)$ をとり，$\angle$POR $=\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ となる C 上の点を R(s,t) とする．さらに，C 上の点 X を 2 つのベクトル $s\overrightarrow{\mathrm{OA}}-t\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ と $t\overrightarrow{\mathrm{OA}}-s\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ が垂直になるようにとる．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ の内積の値を θ を用いて表せ．

(2)　条件をみたす X が弧 AP 上にとれるとき，θ の範囲を求めよ．

(3)　(2) で求めた θ の範囲において，$\triangle$ROX の面積の最大値を求めよ．

7　関数 $f(x)=x2^{-x}$ の区間 $t\leqq x\leqq t+1$ における最小値を $g(t)$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$g(t)$ を求めよ．

(2)　$\displaystyle\int_0^2 g(t)\,dt$ の値を求めよ．

8　関数 $f(x)=\displaystyle\int_x^{\frac{\pi}{4}-x}\log_4(1+\tan t)\,dt\ \left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{8}\right)$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(2)　$f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ および $f(0)$ の値を求めよ．

(3)　条件 $a_1=f(0),\ a_{n+1}=f(a_n)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ．

♠ 文系学部

1　関数 $y=\sin^3 x-\cos^3 x\ (0\leqq x\leqq\pi)$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　$\sin x-\cos x=t$ とおいて，t のとり得る値の範囲を求めよ．

(2)　y を t の式で表せ．

(3)　y の最大値および最小値を求めよ．

2　曲線 $C_1: y=x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$ における接線が曲線 $C_2: y=x^2-4$ と交わる点を B, C とする．ただし，B の x 座標は C の x 座標より小さいとする．以下の問いに答えよ．

(1)　線分 BC の中点 M および C の座標を a を用いて表せ．

(2)　M を通り，y 軸に平行な直線，線分 MC および曲線 C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ．

3　赤球，白球，黒球，黄球，青球が各 1 個ずつ入っている袋が 3 つある．各袋から球を 1 個ずつ取り出す．以下の問いに答えよ．

(1)　取り出した球の色が 2 種類となる確率を求めよ．

(2)　取り出した球の色の数の期待値を求めよ．

4　原点 O を中心として半径 1 の円の第 1 象限の部分 C について考える．C 上に 3 点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\mathrm{P}(1,\ 0)$, $\mathrm{Q}(0,\ 1)$ をとる．$s+t=1$ を満たす $s,\ t\ (0<s<1,\ 0<t<1)$ に対し，弧 AQ 上に点 X を 2 つのベクトル

$$s^2\overrightarrow{\mathrm{OA}}-s\overrightarrow{\mathrm{OX}}\ ,\quad t\overrightarrow{\mathrm{OA}}-t^2\overrightarrow{\mathrm{OX}}$$

が垂直になるようにとる．以下の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を t を用いて表せ．

(2)　$\cos\theta$ のとり得る値の範囲を求めよ．

(3)　$\triangle\mathrm{OAX}$ の面積の最大値を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1 基本 B ベクトル（空間）

2 標準 A 確率

3 標準 B 数列・III 微分法・積分法

4 標準 III 関数の極限・積分法の応用

5 標準 II 三角関数

6 標準 B ベクトル（平面）

7 標準 III 積分法

8 標準 B 数列・III 微分法・積分法

♣ 文系学部

1 基本 II 三角関数

2 標準 II 微分積分

3 基本 A 確率

4 標準 B ベクトル（平面）

略解

◇ 理系学部

1 (1) $y = -t^2 + 2t + 2$

(2) 最大値：3,　最小値：$-1 - 2\sqrt{3}$

2 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OX}} = \sin 2\theta$

(2) $\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{4}$

(3) 最大値：$\dfrac{1}{4}$　$\left(\theta = \dfrac{\pi}{6}\right)$

3 (1)

$$g(t) = \begin{cases} t \cdot 2^{-t} & (t \leqq 1) \\ (t+1) \cdot 2^{-t-1} & (t \geqq 1) \end{cases}$$

(2) $\displaystyle\int_0^2 g(t)\,dt = \frac{5 - 3\log 2}{8(\log 2)^2}$

4 (1) $f'(x) = -\dfrac{1}{2}$

(2) $f\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 0$,　$f(0) = \dfrac{\pi}{16}$

(3) $a_n = \dfrac{\pi}{24} + \dfrac{\pi}{48}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

5 (1) $t = \dfrac{2}{5}$

(2) $0 < t < \dfrac{2}{13}$

6 (1) $\dfrac{19}{70}$

(2) $\dfrac{11}{42}$

7 (1) $f'(x) = -\dfrac{1}{2}$

(2) $f(0) = \dfrac{\pi}{16}$

(3) $a_n = \dfrac{\pi}{24} + \dfrac{\pi}{48}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

8 (1) $a = -\dfrac{1}{p^2+1}$,　$b = -\dfrac{p}{p^2+1}$

(2) $S(t) = -\dfrac{t^2}{t^2+1}e^{-t^2}\sin t - \dfrac{t}{t^2+1}e^{-t^2}\cos t + \dfrac{t}{t^2+1}$

(3) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{S(t)}{t^3} = \frac{1}{2}$

◇ 文系学部

1 （1）$-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$

（2）$y = -\dfrac{1}{2}t^3 + \dfrac{3}{2}t$

（3）最大値：1，　最小値：-1

2 （1）$\mathrm{M}(a,\ a^2)$，　$\mathrm{C}(a+2,\ a^2+4a)$

（2）$\dfrac{16}{3}$

3 （1）$\dfrac{12}{25}$

（2）$\dfrac{61}{25}$

4 （1）$\cos\theta = \dfrac{1}{-t^2+t+1}$

（2）$\dfrac{4}{5} \leqq \cos\theta < 1$

（3）$\dfrac{3}{10}$