◀2008 年　熊本大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　放物線 $y=4x^2+3$ を C とする．x 軸上に点 $\mathrm{P}(p,\,0)$ ($p \neq 0$ とする)，C 上に点 $\mathrm{A}(p,\,4p^2+3)$ をとり，点 A における C の接線 l と x 軸との交点を $\mathrm{Q}(q,\,0)$ とする．さらに，点 B $(q,\,4q^2+3)$ における C の接線を m とする．以下の問いに答えよ．

(1)　q を p を用いて表せ．

(2)　接線 m が点 P を通るとする．$p,\,q$ の値を求めよ．

(3)　(2) で求めた $p,\,q$ に対して，放物線 C と 2 つの接線 $l,\,m$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

2　数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1=0,\quad a_n=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}a_k \quad (n=2,\,3,\,4,\,\cdots)$$

によって定められている．以下の問いに答えよ．

(1)　$b_n=n+a_n$ $(n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$ とおくとき，$b_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$ $(n=2,\,3,\,4,\,\cdots)$ を示せ．

(2)　数列 $\{b_n\}$ が等比数列であることを示せ．

(3)　a_n を求めよ．

(4)　$\sum_{k=1}^{n}a_k$ を求めよ．

3　直線 $y=2x+1$ を l とする．また，行列 $\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$ を A とする．直線 l 上の各点は A が表す移動によって l 上の点に移るとする．以下の問いに答えよ．

(1)　b の値を求め，c を a を用いて表せ．

(2)　$a \neq -\frac{1}{2}$ ならば，直線 l 上の点 P で，A が表す移動によって P 自身に移るものが存在することを示せ．

(3)　直線 l 上の各点 Q は A が表す移動によって Q と異なる l 上の点に移るとする．$a,\,c$ の値を求めよ．

4　放物線 $C:y=\frac{1}{4}x^2$ および点 $\mathrm{F}(0,\,1)$ について考える．以下の問いに答えよ．ただし，O は原点を表す．

(1)　放物線 C 上の点 $\mathrm{A}(x,\,y)$ ($x>0$ とする) に対して $\theta=\angle\mathrm{OFA}$, $r=\mathrm{FA}$ とおく．r を θ を用いて表せ．

(2)　放物線 C 上に n 個の点 $\mathrm{A}_1(x_1,\,y_1),\,\mathrm{A}_2(x_2,\,y_2),\,\cdots,\,\mathrm{A}_n(x_n,\,y_n)$ を

$$x_k>0 \text{ かつ } \angle\mathrm{OFA}_k=\frac{k\pi}{2n} \quad (k=1,\,2,\,3,\,\cdots,\,n)$$

を満たすようにとる．極限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{FA}_k$ を求めよ．

♠ 文系学部

1　a を実数とする．$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，関数 $y=a\cos\theta-2\sin^2\theta$ の最大値，最小値をそれぞれ $M(a)$, $m(a)$ とする．以下の問いに答えよ．

(1)　$M(a)$ と $m(a)$ を求めよ．

(2)　a が実数全体を動くとき，$M(a)$ の最小値と $m(a)$ の最大値を求めよ．

2 n を 3 以上の自然数とする．以下の問いに答えよ．

(1) $2 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数 k について，$k(k-1)_n\mathrm{C}_k = n(n-1)_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}$ を示せ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)_n\mathrm{C}_k$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2{}_n\mathrm{C}_k$ を求めよ．

3 理系学部 **1** と同じ．

4 理系学部 **2** と同じ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1** 標準 [II] 微分積分
- **2** 標準 [B] 数列
- **3** 標準 [C] 行列・1 次変換
- **4** 標準 [C] 極座標と極方程式

♣ 文系学部

- **1** 標準 [I] 2 次関数・[II] 三角関数
- **2** 標準 [A] 場合の数・[B] 数列
- **3** 標準 [II] 微分積分
- **4** 標準 [B] 数列

略解

◇ 理系学部

1 (1) $q=\dfrac{4p^2-3}{8p}$

(2) $(p,\ q)=\left(\pm\dfrac{1}{2},\ \mp\dfrac{1}{2}\right)$（複号同順）

(3) $\dfrac{1}{3}$

2 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) $a_n=2^{n-1}-n$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=2^n-\frac{1}{2}(n^2+n+2)$

3 (1) $b=2,\quad c=2a+1$

(2) 証明は省略

(3) $a=-\dfrac{1}{2},\quad c=0$

4 (1) $r=\dfrac{2}{1+\cos\theta}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{FA}_k=\frac{4}{\pi}$

◇ 文系学部

1 (1)

$$M(a)=\begin{cases}a & (a\geqq 0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$$

$$m(a)=\begin{cases}-a & (a>4)\\ -\dfrac{a^2}{8}-2 & (-4\leqq a\leqq 4)\\ a & (a<-4)\end{cases}$$

(2) $M(a)$ の最小値：0 $(a=0)$

$m(a)$ の最大値：-2 $(a=0)$

2 (1) 証明は省略

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k-1)_n\mathrm{C}_k=n(n-1)2^{n-2}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2{}_n\mathrm{C}_k=n(n+1)2^{n-2}$

3 理系学部 **1** と同じ．

4 理系学部 **2** と同じ．