◀1998 年　熊本大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　次の [1]〜[3] から 1 題選択し，解答せよ．

[1]　次の問いに答えよ．

(1)　$t=x+\dfrac{1}{x}$ とおくとき，$x^2+x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ を t の式で表せ．

(2)　$x^4+x^3+x^2+x+1$ を実数を係数とする x の 2 次の整式の積で表せ．

[2]　3 点 A, B, C がこの順に 1 直線上に並んでいて $\mathrm{AB}=1$ とする．B を通り直線 AC に直交する直線 l が与えられているとき，

$$\mathrm{BD}^2=\mathrm{BC}$$

をみたす l 上の点 D を作図する方法をその理由とともに述べよ．

[3]　$a_1=a_2=1,\ a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\ (n\geqq 3)$ により定まる数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$n=3,\ 4,\ \cdots,\ 9$ に対して a_n の値を求めよ．

(2)　n が 3 の倍数ならば a_n は偶数であり，n が 3 の倍数でなければ a_n は奇数であることを示せ．

2　次の [1]〜[3] から 1 題選択し，解答せよ．

[1]　$\overrightarrow{a}=(2,\ 1,\ 0),\ \overrightarrow{b}=(1,\ 0,\ 1),\ \overrightarrow{c}=(0,\ 0,\ 1)$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　$t,\ s$ が $2t+s=1,\ -1\leqq s\leqq 3$ をみたすとき，$\left|\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}+s\overrightarrow{c}\right|$ の最大値，最小値とそれらを与える $t,\ s$ の値を求めよ．

(2)　(1) で求めた最小値を与える $t,\ s$ の値を $t_0,\ s_0$ とする．$\overrightarrow{a}+t_0\overrightarrow{b}+s_0\overrightarrow{c}$ が $\overrightarrow{b}+k\overrightarrow{c}$ に垂直であるときの k の値を求めよ．

[2]　x の方程式 $x^3+(m-1)x^2-(m-n)x-n=0$ ($m,\ n$ は正の整数) の解のうち 2 つの解 $\alpha,\ \beta$ について，

$$\alpha\beta=5,\quad \frac{\alpha-\beta}{2i}\ \text{は正の整数}$$

が成立するとき，$m,\ n,\ \alpha,\ \beta$ の組をすべて求めよ．ただし，i は虚数単位である．

[3]　異なる 3 つの箱がある．これら 3 つの箱のうち 1 つを無作為に選び，その中にボールを 1 個入れる試行を繰り返す．第 1 回目の試行を始める前の 3 つの箱は空であるとする．第 n 回目の試行後にボールが 2 個以上入っている箱の数を X_n，ボールが 1 個だけ入っている箱の数を Y_n とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　$X_3=0$ かつ $Y_3=3$ である事象を A_1，$X_3=1$ かつ $Y_3=1$ である事象を A_2，$X_3=1$ かつ $Y_3=0$ である事象を A_3 とするとき，$A_1,\ A_2,\ A_3$ の確率 $P(A_1),\ P(A_2),\ P(A_3)$ を求めよ．

(2)　$P_{A_i}(X_4=1),\ P_{A_i}(X_4=2)$ を $i=1,\ 2,\ 3$ について求めよ．ただし，$P_A(B)$ は事象 A が起こったときに事象 B の起こる条件つき確率である．

(3)　X_4 の期待値 $E(X_4)$ を求めよ．

3　$x,\ y$ は実数で，

$$x^2-2xy+y^2+2x+2y+3=0$$

をみたすとき，$x+y$ の最大値，xy の最小値とそれらを与える $x,\ y$ の値を求めよ．

4　次の問いに答えよ．

(1)　自然数 q を $q=2^r p$（r は 0 以上の整数，p は奇数）と表す．$\log_2 q$ が有理数ならば $p=1$ であることを示せ．

(2)　自然数 a, b に対して，$\log_4 a=k+\alpha$, $\log_4 b=l+\beta$ とおく．ただし，k, l は整数で，α, β は $0 \leqq \alpha<1$, $0 \leqq \beta<1$ である．このとき，$\alpha+\beta$ は $0, \dfrac{1}{2}, 1$ または無理数であることを示せ．

5　$x=2\cos t,\ y=\sin t\ \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ で表される曲線 C に関して，次の問いに答えよ．

(1)　$t=\dfrac{\pi}{4}$ における法線の式を求めよ．

(2)　(1) で求めた法線と曲線 C および x 軸によって囲まれる図形の面積を求めよ．

♠ 文系学部

1　理系学部 **1** と同じ．

2　理系学部 **2** と同じ．

3　各辺の長さが 2 の正四面体 ABCD の辺 AD 上に点 P があり，辺 BC 上に点 Q がある．$\mathrm{AP}=t$, $\mathrm{BQ}=2t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ であるとき，次の問いに答えよ．

(1)　PB の長さを t の式で表せ．

(2)　$\angle \mathrm{PBC}=\theta$ とおくとき，$\cos\theta$ を t の式で表せ．

(3)　PQ の長さの最小値を求めよ．

4　2 つの放物線 $y=-(x+a)^2$ と $y=x^2+b$ で囲まれる図形の面積を S とする．ただし，a, b は $b=-a^2+2a-2$, $b \geqq -2$ をみたすとする．次の問いに答えよ．

(1)　S を a の式で表せ．

(2)　S の値の範囲を求めよ．

5　自然数 a を $a=2^p k$（p は 0 以上の整数，k は奇数）と表したとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\log_2 a$ が有理数ならば $k=1$ であることを示せ．

(2)　$\log_4 a$ は $\dfrac{1}{2}$ の整数倍かまたは無理数のいずれかであることを示せ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1 基本 　A 整式の計算・数列・ II 軌跡

2 標準 　B 高次方程式・ベクトル（空間）・条件つき確率

3 標準 　I ２次関数

4 やや難 　A 論証・ II 指数関数・対数関数

5 基本 　III 微分法の応用・積分法の応用

♣ 文系学部

1 基本 　A 整式の計算・数列・ II 軌跡

2 標準 　B 高次方程式・ベクトル（空間）・条件つき確率

3 基本 　I 図形と計量

4 標準 　II 微分積分

5 やや難 　A 論証・ II 指数関数・対数関数

略解

◇ 理系学部

1 [1](1)　t^2+t-2

[1](2)　$\left(x^2+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}x+1\right)\left(x^2+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)$

[2]　線分 AC を直径とする円と，直線 l との交点を D とすればよい．（理由は省略）

[3](1)　$a_3=2,\ a_4=3,\ a_5=5,\ a_6=8,\ a_7=13,\ a_8=21,\ a_9=34$

[3](2)　証明は省略

2 [1](1)　最大値 ： $\sqrt{10}$ （$t=1,\ s=-1$）

最小値 ： $\dfrac{\sqrt{22}}{2}$ $\left(t=-\dfrac{1}{2},\ s=2\right)$

[1](2)　$k=-2$

[2]　$(m,\ n,\ \alpha,\ \beta)=(4,\ 5,\ -2+i,\ -2-i),\ (2,\ 5,\ -1+2i,\ -1-2i)$

[3](1)　$P(A_1)=\dfrac{2}{9},\ P(A_2)=\dfrac{2}{3},\ P(A_3)=\dfrac{1}{9}$

[3](2)　$P_{A_1}(X_4=1)=1,\ P_{A_2}(X_4=1)=\dfrac{2}{3},\ P_{A_3}(X_4=1)=1$

$P_{A_1}(X_4=2)=0,\ P_{A_2}(X_4=2)=\dfrac{1}{3},\ P_{A_3}(X_4=2)=0$

[3](3)　$E(X_4)=\dfrac{11}{9}$

3　$x+y$ の最大値 ： $-\dfrac{3}{2}$ ， xy の最小値 ： $\left(x=y=-\dfrac{3}{4}\right)$

4 (1)　証明は省略

(2)　証明は省略

5 (1)　$y=2x-\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$

(2)　$\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{3}{8}$

◇ 文系学部

1　理系学部 **1** と同じ．

2　理系学部 **2** と同じ．

3 (1)　$\mathrm{PB}=\sqrt{t^2-2t+4}$

(2)　$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{t^2-2t+4}}$

(3)　最小値 ： $\dfrac{\sqrt{55}}{5}$ $\left(t=\dfrac{3}{5}\right)$

4 (1)　$S=\dfrac{1}{3}(2-a)^3$

(2)　$0\leqq S\leqq\dfrac{8}{3}$

5 (1)　証明は省略

(2)　証明は省略