◀1996 年　熊本大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　曲線 $C : y = x^2$ について，次の問いに答えよ．

(1)　直線 $y = mx + a$ と曲線 C が異なる 2 点 P, Q で交わるとき，線分 PQ の中点を M_a とする．a が動いたときの点 M_a の軌跡を求めよ．

(2)　点 M_a の軌跡，直線 $y = mx + 1$ および曲線 C で囲まれる二つの部分の面積を各々求めよ．

2　座標空間に，原点を中心とする半径 1 の球面，x 軸上の $x>0$ の部分に中心をもつ半径 q の球面，および y 軸上の $y>0$ の部分に中心をもつ半径 r の球面がある．これらが互いに外接するとき，次の問いに答えよ．

(1)　r を q の式で表せ．

(2)　xy 平面と，これら三つの球面すべてに接する平面との交線の方程式を求めよ．

3　関数 $f(x)\ (x \geqq 0)$ が

$$\frac{1}{3} + \int_1^x f(t)\,dt = \frac{1}{3}xf(x)$$

をみたすとき，次の問いに答えよ．

(1)　$f(x)$ を求めよ．

(2)　座標空間において，四つの平面

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 25, \quad z = y$$

および曲面 $z = f(x)\ (x \geqq 0)$ で囲まれる部分の体積を求めよ．

4　袋の中に赤玉が 4 個，白玉が 3 個入っている．この袋から同時に 2 個の玉を取り出したときの赤玉の数を X とする．取り出した玉を袋に戻さずに，さらに $X + 1$ 個の玉を同時に取り出したときの赤玉の数を Y とする．

(1)　確率変数 Y の確率分布の表を作れ．

(2)　確率変数 $X + Y$ の期待値を求めよ．

♠ 文系学部

1　行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対して，$A^2 - 10A + 3E = O$ が成り立つとき，次の問いに答えよ．ただし，$b \neq 0$ とする．

(1)　$a + d$ および $ad - bc$ の値を求めよ．

(2)　$(A^2)^{-1} = pA + qE$ をみたす数 p, q を求めよ．

2　座標空間に，原点を中心とする半径 1 の球面，x 軸上の $x>0$ の部分に中心をもつ半径 2 の球面，および y 軸上の $y>0$ の部分に中心をもつ半径 r の球面がある．これらが互いに外接するとき，次の問いに答えよ．

(1)　r の値を求めよ．

(2)　平面 $ax + by + cz + 1 = 0$ がこれら三つの球面すべてに接するとき，a, b, c の値を求めよ．

3　曲線 $C : y = x^2$ について，次の問いに答えよ．

(1)　直線 $y = x + a$ と曲線 C が異なる 2 点 P, Q で交わるとき，線分 PQ の中点を M_a とする．a が動いたときの点 M_a の軌跡を求めよ．

(2)　点 M_a の軌跡，直線 $y = x + 1$ および曲線 C で囲まれる二つの部分の面積を各々求めよ．

4　二つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が

$$\begin{cases} a_1 = 1, \quad a_n \fallingdotseq 0 & (n = 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \\ na_n = 2^{n-1}b_n & (n = 1,\ 2,\ \cdots\cdots) \\ {a_n}^2 b_{n-1} = 4{a_{n-1}}^2 b_n & (n = 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \end{cases}$$

をみたすとき，次の問いに答えよ．

(1)　a_n を a_{n-1} を用いて表せ．

(2)　a_n および b_n を求めよ．

(3)　$\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　標準　Ⅰ 図形と方程式・基解 微分積分

2　標準　代幾 直線・平面・球面の方程式

3　標準　微積 微分方程式・積分法の応用

4　標準　確統 確率分布

♣ 文系学部

1　標準　代幾 行列

2　標準　代幾 直線・平面・球面の方程式

3　標準　Ⅰ 図形と方程式・基解 微分積分

4　標準　基解 数列

略解

◇ 理系学部

1 (1) 半直線 $x=\dfrac{m}{2}\ \left(y>\dfrac{m^2}{4}\right)$

(2) 二つの部分の面積は，ともに $\dfrac{1}{12}(m^2+4)^{\frac{3}{2}}$

2 (1) $r=\dfrac{q+1}{q-1}$

(2) $\dfrac{x}{r}+\dfrac{y}{q}+1=0,\ z=0$

3 (1) $f(x)=x^2$

(2) 1250

4 (1)

Y	0	1	2	計
確率	$\dfrac{4}{35}$	$\dfrac{22}{35}$	$\dfrac{9}{35}$	1

(2) $\dfrac{16}{7}$

◇ 文系学部

1 (1) $a+d=10,\ ad-bc=3$

(2) $p=-\dfrac{10}{9},\ q=\dfrac{97}{9}$

2 (1) $r=3$

(2) $a=\dfrac{1}{3},\ b=\dfrac{1}{2},\ c=\pm\dfrac{\sqrt{23}}{6}$

3 (1) 半直線 $x=\dfrac{1}{2}\ \left(y>\dfrac{1}{4}\right)$

(2) 二つの部分の面積は，ともに $\dfrac{5\sqrt{5}}{12}$

4 (1) $a_n=\dfrac{2n}{n-1}a_{n-1}\ (n\geqq 2)$

(2) $a_n=n\cdot 2^{n-1},\quad b_n=n^2\ (n\geqq 1)$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=(n-1)2^n+1$