

## ◀2012年 神戸大学(前期)▶

## ♠ 理系学部

**1** 座標平面上に2点  $A(1, 0)$ ,  $B(-1, 0)$  と直線  $l$  があり,  $A$  と  $l$  の距離と  $B$  と  $l$  の距離の和が1であるという. 以下の問に答えよ.

- (1)  $l$  は  $y$  軸と平行でないことを示せ.
- (2)  $l$  が線分  $AB$  と交わる時,  $l$  の傾きを求めよ.
- (3)  $l$  が線分  $AB$  と交わらないとき,  $l$  と原点との距離を求めよ.

**2**  $x$  を実数とし,  $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $P = A - xE$  とおく.  $P$  は  $P^2 = P$  をみたすとす. 以下の問に答えよ.

- (1)  $x$  の値を求めよ.
- (2)  $n$  を自然数とする.

$$A^n = a_n P + b_n E$$

をみたす  $a_n, b_n$  を  $n$  を用いて表せ.

**3**  $x > 0$  に対し関数  $f(x)$  を

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

と定め,  $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$  とおく. 以下の問に答えよ.

- (1)  $\frac{d}{dx} f(x)$  を求めよ.
- (2)  $\frac{d}{dx} g(x)$  を求めよ.
- (3)  $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$  を求めよ.

**4** 自然対数の底を  $e$  とする. 以下の問に答えよ.

- (1)  $e < 3$  であることを用いて, 不等式  $\log 2 > \frac{3}{5}$  が成り立つことを示せ.
- (2) 関数  $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x} - x$  の導関数を求めよ.
- (3) 積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \cos x} dx$$

の値を求めよ.

- (4) (3) で求めた値が正であるか負であるかを判定せよ.

**5** 座標平面上の曲線  $C$  を, 媒介変数  $0 \leq t \leq 1$  を用いて

$$\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}$$

と定める. 以下の問に答えよ.

- (1) 曲線  $C$  の概形を描け.
- (2) 曲線  $C$  と  $x$  軸で囲まれた部分が,  $y$  軸の周りに1回転してできる回転体の体積を求めよ.

## ♠ 文系学部

**1** 理系学部の **1** と同じ.

**2**  $a$  を正の実数とする. 2つの放物線

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 3a$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2ax - a^3 - a^2$$

が異なる2点で交わるとし, 2つの放物線によって囲まれる部分の面積を  $S(a)$  とする. 以下の問に答えよ.

- (1)  $a$  の値の範囲を求めよ.
- (2)  $S(a)$  を  $a$  を用いて表せ.
- (3)  $S(a)$  の最大値とそのときの  $a$  の値を求めよ.

**3** 以下の問に答えよ.

- (1) 正の実数  $x, y$  に対して

$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 2$$

が成り立つことを示し, 等号が成立するための条件を求めよ.

- (2)  $n$  を自然数とする.  $n$  個の正の実数  $a_1, \dots, a_n$  に対して

$$(a_1 + \dots + a_n) \left( \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$$

が成り立つことを示し, 等号が成立するための条件を求めよ.

## 出題範囲と難易度

## ♣ 理系学部

- 1** 標準  II 図形と方程式
- 2** 標準  C 行列
- 3** 標準  III 積分法
- 4** 基本  III 微分法の応用・積分法の応用
- 5** 標準  III 積分法の応用

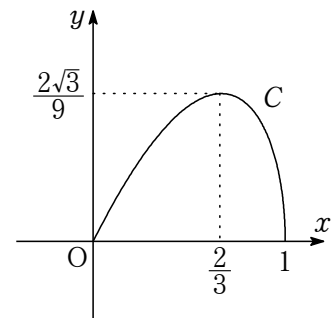
## ♣ 文系学部

- 1** 標準  II 図形と方程式
- 2** 標準  II 微分積分
- 3** 標準  II 不等式の証明

## 略解

## ◇ 理系学部

- 1** (1) 証明は省略  
 (2)  $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$   
 (3)  $\frac{1}{2}$
- 2** (1)  $x = 2$   
 (2)  $a_n = 3^n - 2^n, b_n = 2^n$
- 3** (1)  $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{1+x^2}$   
 (2)  $\frac{d}{dx} g(x) = -\frac{1}{1+x^2}$   
 (3)  $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$
- 4** (1) 証明は省略  
 (2)  $f'(x) = -\frac{\cos x}{1+\cos x}$   
 (3)  $\log 2 + 1 - \frac{\pi}{2}$   
 (4) 正
- 5** (1) 曲線  $C$  の概形は右図.  
 (2)  $\frac{32}{105}\pi$



## ◇ 文系学部

- 1** 理系学部 **1** と同じ.
- 2** (1)  $0 < a < \sqrt{3}$   
 (2)  $S(a) = \frac{4}{3}(3a - a^3)^{\frac{3}{2}}$   
 (3) 最大値 :  $\frac{8\sqrt{2}}{3}$  ( $a = 1$ )
- 3** (1) 証明は省略. 等号成立条件は,  $x = y$   
 (2) 証明は省略. 等号成立条件は,  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$