◀2011 年　神戸大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　$i=\sqrt{-1}$ とする．以下の問に答えよ．

(1)　実数 α, β について，等式

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$$

が成り立つことを示せ．

(2)　自然数 n に対して，

$$z=\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}\right)$$

とおくとき，等式

$$z\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)=z$$

が成り立つことを示せ．

(3)　2 以上の自然数 n について，等式

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2\pi k}{n}=\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2\pi k}{n}=0$$

が成り立つことを示せ．

2　以下の問に答えよ．

(1)　t を正の実数とするとき，$|x|+|y|=t$ の表す xy 平面上の図形を図示せよ．

(2)　a を $a\geqq 0$ をみたす実数とする．x, y が連立不等式

$$\begin{cases} ax+(2-a)y\geqq 2 \\ y\geqq 0 \end{cases}$$

をみたすとき，$|x|+|y|$ のとりうる値の最小値 m を，a を用いた式で表せ．

(3)　a が $a\geqq 0$ の範囲を動くとき，(2) で求めた m の最大値を求めよ．

3　n を 2 以上の自然数として，

$$S_n=\sum_{k=n}^{n^3-1}\frac{1}{k\log k}$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1)　$\displaystyle\int_n^{n^3}\frac{dx}{x\log x}$ を求めよ．

(2)　k を 2 以上の自然数とするとき，

$$\frac{1}{(k+1)\log(k+1)}<\int_k^{k+1}\frac{dx}{x\log x}<\frac{1}{k\log k}$$

を示せ．

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ の値を求めよ．

4　a は正の無理数で，$X=a^3+3a^2-14a+6$, $Y=a^2-2a$ を考えると，X と Y はともに有理数である．以下の問に答えよ．

(1)　整式 $x^3+3x^2-14x+6$ を整式 x^2-2x で割ったときの商と余りを求めよ．

(2)　X と Y の値を求めよ．

(3)　a の値を求めよ．ただし，素数の平方根は無理数であることを用いてよい．

5　以下の問に答えよ．

(1)　$x \geqq 1$ において，$x > 2\log x$ が成り立つことを示せ．ただし，e を自然対数の底とするとき，$2.7 < e < 2.8$ であることを用いてよい．

(2)　自然数 n に対して，

$$(2n\log n)^n < e^{2n\log n}$$

が成り立つことを示せ．

♠ 文系学部

1　実数 x, y に対して，等式

$$x^2+y^2=x+y \cdots\cdots ①$$

を考える．$t=x+y$ とおく．以下の問に答えよ．

(1)　① の等式が表す xy 平面上の図形を図示せよ．

(2)　x と y が ① の等式をみたすとき，t のとりうる値の範囲を求めよ．

(3)　x と y が ① の等式をみたすとする．

$$F=x^3+y^3-x^2y-xy^2$$

を t を用いた式で表せ．また，F のとりうる値の最大値と最小値を求めよ．

2　xy 平面上に相異なる 4 点 A, B, C, D があり，線分 AC と BD は原点 O で交わっている．点 A の座標は (1, 2) で，線分 OA と OD の長さは等しく，四角形 ABCD は円に内接している．$\angle\mathrm{AOD}=\theta$ とおき，点 C の x 座標を a，四角形 ABCD の面積を S とする．以下の問に答えよ．

(1)　線分 OC の長さを a を用いた式で表せ．また，線分 OB と OC の長さは等しいことを示せ．

(2)　S を a と θ を用いた式で表せ．

(3)　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ とし，$20 \leqq S \leqq 40$ とするとき，a のとりうる値の最大値を求めよ．

3　袋の中に 0 から 4 までの数字のうち 1 つが書かれたカードが 1 枚ずつ合計 5 枚入っている．4 つの数 0, 3, 6, 9 をマジックナンバーと呼ぶことにする．次のようなルールをもつ，1 人で行うゲームを考える．

［ルール］　袋から無作為に 1 枚ずつカードを取り出していく．ただし，一度取り出したカードは袋に戻さないものとする．取り出したカードの数字の合計がマジックナンバーになったとき，その時点で負けとし，それ以降はカードを取り出さない．途中で負けとなることなく，すべてのカードを取り出せたとき，勝ちとする．

以下の問に答えよ．

(1)　2 枚のカードを取り出したところで負けとなる確率を求めよ．

(2)　3 枚のカードを取り出したところで負けとなる確率を求めよ．

(3)　このゲームで勝つ確率を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1 標準　$\boxed{\text{III}}$ 複素数と方程式・$\boxed{\text{B}}$ 数列

2 標準　$\boxed{\text{II}}$ 図形と方程式

3 標準　$\boxed{\text{III}}$ 極限・積分法の応用

4 標準　$\boxed{\text{II}}$ 整式

5 標準　$\boxed{\text{III}}$ 微分法の応用

♣ 文系学部

1 標準　$\boxed{\text{II}}$ 図形と方程式・微分積分

2 標準　$\boxed{\text{I}}$ 図形と計量・$\boxed{\text{A}}$ 平面図形

3 標準　$\boxed{\text{A}}$ 確率

略解

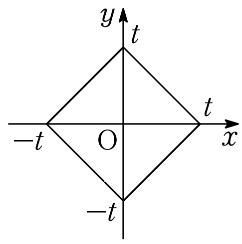
◇ 理系学部

1 （1）証明は省略

（2）証明は省略

（3）証明は省略

2 （1）グラフは右図



（2）$m = \begin{cases} \dfrac{2}{2-a} & (0 \leqq a \leqq 1) \\ \dfrac{2}{a} & (1 \leqq a) \end{cases}$

（3）最大値 ： 2 （$a = 1$）

3 （1）$\displaystyle\int_n^{n^3} \frac{dx}{x\log x} = \log 3$

（2）証明は省略

（3）$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \log 3$

4 （1）商 ： $x+5$，余り ： $-4x+6$

（2）$X = 26$， $Y = 4$

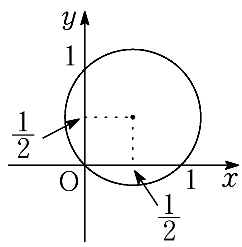
（3）$a = 1+\sqrt{5}$

5 （1）証明は省略

（2）証明は省略

◇ 文系学部

1 （1）グラフは右図



（2）$0 \leqq t \leqq 2$

（3）$F = -t^3 + 2t^2$， $0 \leqq F \leqq \dfrac{32}{27}$

2 （1）$\mathrm{OC} = -\sqrt{5}a$， 証明は省略

（2）$S = \dfrac{5}{2}(1-a)^2 \sin\theta$

（3）最大値 ： -3

3 （1）$\dfrac{1}{5}$

（2）$\dfrac{2}{15}$

（3）$\dfrac{1}{5}$