◀2010 年　神戸大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　a を実数とする．関数 $f(x) = ax + \cos x + \dfrac{1}{2}\sin 2x$ が極値をもたないように，a の値の範囲を定めよ．

2　p を 3 以上の素数，a, b を自然数とする．以下の問に答えよ．ただし，自然数 m, n に対し，mn が p の倍数ならば，m または n は p の倍数であることを用いてよい．

(1)　$a+b$ と ab がともに p の倍数であるとき，a と b はともに p の倍数であることを示せ．

(2)　$a+b$ と a^2+b^2 がともに p の倍数であるとき，a と b はともに p の倍数であることを示せ．

(3)　a^2+b^2 と a^3+b^3 がともに p の倍数であるとき，a と b はともに p の倍数であることを示せ．

3　$f(x) = \dfrac{\log x}{x}$, $g(x) = \dfrac{2\log x}{x^2}$ $(x > 0)$ とする．以下の問いに答えよ．ただし，自然対数の底 e について，$e = 2.718\cdots$ であること，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = 0$ であることを証明なしで用いてよい．

(1)　2 曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の共有点の座標をすべて求めよ．

(2)　区間 $x > 0$ において，関数 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の増減，極値を調べ，2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ のグラフの概形をかけ．グラフの変曲点は求めなくてよい．

(3)　区間 $1 \leqq x \leqq e$ において，2 曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$，および直線 $x = e$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

4　N を自然数とする．赤いカード 2 枚と白いカード N 枚が入っている袋から無作為にカードを 1 枚ずつ取り出して並べていくゲームをする．2 枚目の赤いカードが取り出された時点でゲームは終了する．赤いカードが最初に取り出されるまでに取り出された白いカードの枚数を X とし，ゲーム終了時までに取り出された白いカードの総数を Y とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1)　$n = 0, 1, \cdots, N$ に対して，$X = n$ となる確率 p_n を求めよ．

(2)　X の期待値を求めよ．

(3)　$n = 0, 1, \cdots, N$ に対して，$Y = n$ となる確率 q_n を求めよ．

5　座標平面において，点 $\mathrm{P}_n(a_n, b_n)$ $(n \geqq 1)$ を

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \qquad (n \geqq 2)$$

で定める．このとき，以下の問に答えよ．

(1)　a_n, b_n を n と θ を用いて表せ．

(2)　$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，自然数 n に対して，線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の長さ l_n を求めよ．

(3)　(2) で求めた l_n に対して，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ を求めよ．

♠ 文系学部

1 　実数 a, b に対して，$f(x) = a(x-b)^2$ とおく．ただし，a は正とする．放物線 $y = f(x)$ が直線 $y = -4x + 4$ に接している．このとき，以下の問に答えよ．

(1)　b を a を用いて表せ．

(2)　$0 \leqq x \leqq 2$ において，$f(x)$ の最大値 $M(a)$ と，最小値 $m(a)$ を求めよ．

(3)　a が正の実数を動くとき，$M(a)$ の最小値を求めよ．

2 　空間内に 4 点 O, A, B, C があり，

$$\mathrm{OA} = 3, \quad \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = 4, \quad \angle\mathrm{BOC} = \angle\mathrm{COA} = \angle\mathrm{AOB} = \frac{\pi}{3}$$

であるとする．3 点 A, B, C を通る平面に垂線 OH をおろす．このとき，以下の問に答えよ．

(1)　$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$ と表すとき，r, s, t を求めよ．

(2)　直線 CH と直線 AB の交点を D とするとき，長さの比 CH : HD, AD : DB をそれぞれ求めよ．

3 　a, b を自然数とする．以下の問に答えよ．

(1)　ab が 3 の倍数であるとき，a または b は 3 の倍数であることを示せ．

(2)　$a + b$ と ab がともに 3 の倍数であるとき，a と b はともに 3 の倍数であることを示せ．

(3)　$a + b$ と $a^2 + b^2$ がともに 3 の倍数であるとき，a と b はともに 3 の倍数であることを示せ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1 標準　III 微分法の応用

2 標準　I 整数問題

3 標準　III 積分法の応用

4 標準　A 確率・B 数列

5 標準　III 数列の極限・C 行列・１次変換

♣ 文系学部

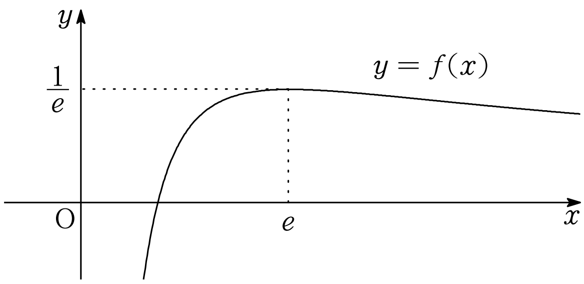
1 標準　I ２次関数・II 式と証明

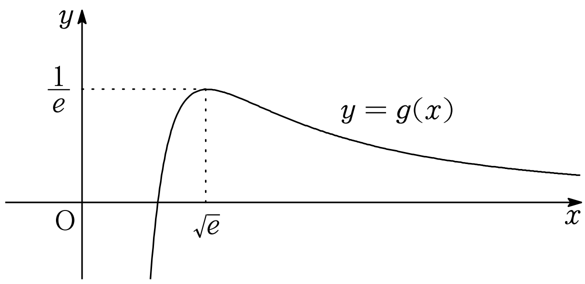
2 基本　B ベクトル（空間）

3 基本　I 整数問題

略解

◇ 理系学部





❶ $a \leqq -\dfrac{9}{8},\ 2 \leqq a$

❷ (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

❸ (1) $(1,\ 0)$, $\left(2,\ \dfrac{1}{2}\log 2\right)$

(2) グラフは右図

(3) $-(\log 2)^2 - 2\log 2 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{e}$

❹ (1) $p_n = \dfrac{2(N-n+1)}{(N+1)(N+2)}$

(2) $\dfrac{N}{3}$

(3) $q_n = \dfrac{2(n+1)}{(N+1)(N+2)}$

❺ (1) $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\cos(n-1)\theta,\quad b_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\sin(n-1)\theta$

(2) $l_n = \dfrac{\sqrt{3}}{2^n}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \sqrt{3}$

◇ 文系学部

❶ (1) $b = \dfrac{1}{a} + 1$

(2) $M(a) = \dfrac{(a+1)^2}{a}$

$$m(a) = \begin{cases} \dfrac{(a-1)^2}{a} & (0 < a \leqq 1) \\ 0 & (1 \leqq a) \end{cases}$$

(3) $4\ \ (a = 1)$

❷ (1) $r = \dfrac{2}{3},\quad s = t = \dfrac{1}{6}$

(2) $\mathrm{CH} : \mathrm{HD} = 5 : 1,\quad \mathrm{AD} : \mathrm{DB} = 1 : 4$

❸ (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略