# ◀2009 年　神戸大学（前期）▶

## ♠ 理系学部

**1**　$a, b$ は実数で $a > b > 0$ とする．区間 $0 \leqq x \leqq 1$ で定義される関数 $f(x)$ を次のように定める．

$$f(x) = \log(ax + b(1-x)) - x\log a - (1-x)\log b$$

ただし，log は自然対数を表す．このとき，以下のことを示せ．

(1)　$0 < x < 1$ に対して $f''(x) < 0$ が成り立つ．

(2)　$f'(c) = 0$ をみたす実数 $c$ が，$0 < c < 1$ の範囲にただ 1 つ存在する．

(3)　$0 \leqq x \leqq 1$ をみたす実数 $x$ に対して，

$$ax + b(1-x) \geqq a^x b^{1-x}$$

が成り立つ．

**2**　$f(x) = x^3 - 3x + 1$, $g(x) = x^2 - 2$ とし，方程式 $f(x) = 0$ について考える．このとき，以下のことを示せ．

(1)　$f(x) = 0$ は絶対値が 2 より小さい 3 つの相異なる実数解をもつ．

(2)　$\alpha$ が $f(x) = 0$ の解ならば，$g(\alpha)$ も $f(x) = 0$ の解となる．

(3)　$f(x) = 0$ の解を小さい順に $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ とすれば，

$$g(\alpha_1) = \alpha_3, \quad g(\alpha_2) = \alpha_1, \quad g(\alpha_3) = \alpha_2$$

となる．

**3**　$a$ を $0 \leqq a < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲にある実数とする．2 つの直線 $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ および 2 つの曲線 $y = \cos(x - a)$, $y = -\cos x$ によって囲まれる図形を $G$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1)　図形 $G$ の面積を $S$ とする．$S$ を $a$ を用いた式で表せ．

(2)　$a$ が $0 \leqq a < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，$S$ を最大にするような $a$ の値と，そのときの $S$ の値を求めよ．

(3)　図形 $G$ を $x$ 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を $V$ とする．$V$ を $a$ を用いた式で表せ．

**4**　大小 2 つのサイコロを同時に 1 回投げて，大きいサイコロの出た目の数 $A$，および小さいサイコロの出た目の数 $B$ に応じて得点を競うゲームを考える．ただし，このゲームには 6 種類の得点 $X_n$ $(1 \leqq n \leqq 6)$ があって，それぞれ，次の規則で定められているとする：

$$X_n = \begin{cases} A & (A \geqq n \text{ のとき}) \\ B & (A < n \text{ かつ } A \neq B \text{ のとき}) \\ aA + b & (A < n \text{ かつ } A = B \text{ のとき}) \end{cases}$$

ここで，$a, b$ は実数の定数である．また，得点 $X_n$ の期待値を $E_n$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1)　$A, B$ のとり得る値に対する得点 $X_3$ および $X_4$ の値を，答案用紙の表にそれぞれ記入せよ．

(2)　$E_4 - E_3$ を求めよ．

(3)　$E_1 = E_2 = \cdots = E_6$ となるような $a, b$ はあるか．あれば求めよ．なければ，そのことを示せ．

**5**　$t$ を実数として，数列 $a_1, a_2, \cdots$ を

$$a_1 = 1,\quad a_2 = 2t,$$
$$a_{n+1} = 2ta_n - a_{n-1}\quad (n \geqq 2)$$

で定める．このとき，以下の問に答えよ．

(1)　$t \geqq 1$ ならば，$0 < a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ となることを示せ．

(2)　$t \leqq -1$ ならば，$0 < |a_1| < |a_2| < |a_3| < \cdots$ となることを示せ．

(3)　$-1 < t < 1$ ならば，$t = \cos\theta$ となる $\theta$ を用いて，

$$a_n = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\quad (n \geqq 1)$$

となることを示せ．

## ♠ 文系学部

**1**　以下の問に答えよ．

(1)　$xy$ 平面において，$\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{A}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ とする．このとき，

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)^2 + \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 \leqq 1$$

をみたす点 P 全体のなす図形の面積を求めよ．

(2)　$xyz$ 空間において，$\mathrm{O}(0, 0, 0)$, $\mathrm{A}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ とする．このとき，

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)^2 + \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2 \leqq 1$$

をみたす点 P 全体のなす図形の体積を求めよ．

**2**　$a$ を正の実数とし，$f(x) = -a^2x^2 + 4ax$ とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1)　$0 \leqq x \leqq 3$ における $f(x)$ の最大値を求めよ．

(2)　2 点 $\mathrm{A}(2, 3)$, $\mathrm{B}(3, 3)$ を端点とする線分を $l$ とする．曲線 $y = f(x)$ と線分 $l$（端点を含む）が共有点を持つような $a$ の値の範囲を求め，数直線上に図示せよ．

**3**　以下の問に答えよ．

(1)　A, B の 2 人がそれぞれ，「石」,「はさみ」,「紙」の 3 種類の「手」から無作為に 1 つを選んで，双方の「手」によって勝敗を決める．「石」は「はさみ」に勝ち「紙」に負け，「はさみ」は「紙」に勝ち「石」に負け，「紙」は「石」に勝ち「はさみ」に負け，同じ「手」どうしは引き分けとする．A が B に勝つ確率と引き分ける確率を求めよ．

(2)　上の 3 種類の「手」の勝敗規則を保ちつつ，これらに加えて，4 種類目の「手」として「水」を加える．「水」は「石」と「はさみ」には勝つが「紙」には負け，同じ「手」どうしは引き分けとする．A, B がともに 4 種類の「手」から無作為に 1 つを選ぶとするとき，A が勝つ確率と引き分けの確率を求めよ．

(3)　上の 4 種類「手」の勝敗規則を保ちつつ，これらに加え，さらに第 5 の「手」として「土」を加える．B が 5 種類の「手」から無作為に 1 つを選ぶとき，A の勝つ確率が A の選ぶ「手」によらないようにするためには，「土」と「石」「はさみ」「紙」「水」との勝敗規則をそれぞれどのように定めればよいか．ただし，同じ「手」どうしの場合，しかもその場合にのみ引き分けとする．

## 出題範囲と難易度

### ♣ 理系学部

1 標準 III 微分法の応用

2 やや難 II 微分積分

3 標準 III 積分法の応用

4 やや難 A 確率

5 やや難 II 三角関数・B 数列

### ♣ 文系学部

1 標準 B ベクトル（平面・空間）

2 標準 II 微分積分

3 標準 A 確率

# 略解

## ◇ 理系学部

**1** （1） 証明は省略

（2） 証明は省略

（3） 証明は省略

**2** （1） 証明は省略

（2） 証明は省略

（3） 証明は省略

**3** （1） $S = \sin a + \cos a + 1$

（2） 最大値 ： $\sqrt{2} + 1$　$\left(a = \dfrac{\pi}{4}\right)$

（3） $V = \dfrac{\pi}{4}(\sin 2a + 2\sin a + \pi)$

**4** （1） $X_3$：

| $A$ \ $B$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $a+b$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 1 | $2a+b$ | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |

$X_4$：

| $A$ \ $B$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $a+b$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 1 | $2a+b$ | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 3 | 1 | 2 | $3a+b$ | 4 | 5 | 6 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |

（2） $E_4 - E_3 = \dfrac{1}{36}(3a + b)$

（3） $a = 7$，$b = -21$

**5** （1） 証明は省略

（2） 証明は省略

（3） 証明は省略

## ◇ 文系学部

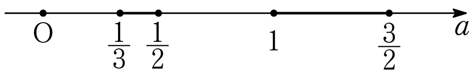
**1** （1）　$\pi$

（2）　$\dfrac{4}{3}\pi$

**2** （1）　最大値 ： $\begin{cases} 4 & \left(a \geqq \dfrac{2}{3}\right) \\ -9a^2+12a & \left(0<a<\dfrac{2}{3}\right) \end{cases}$

（2）　$\dfrac{1}{3} \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}$，$1 \leqq a \leqq \dfrac{3}{2}$

領域は，右図太線部分．




**3** （1）　勝つ確率 ： $\dfrac{1}{3}$，　引き分ける確率 ： $\dfrac{1}{3}$

（2）　勝つ確率 ： $\dfrac{3}{8}$，　引き分ける確率 ： $\dfrac{1}{4}$

（3）「土は紙と水に勝ち，石とはさみに負ける」ように決めればよい．