◀1999 年　神戸大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　$0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ とし，関数 $f(x)$ を

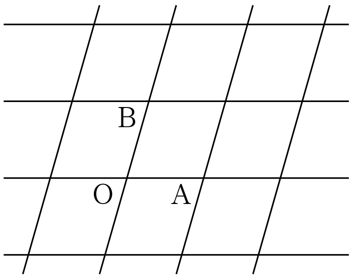
$$f(x) = |x - a|\sin x \quad \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

とする．$y = f(x)$ のグラフと，x 軸および直線 $x = \dfrac{\pi}{2}$ で囲まれた 2 つの図形の面積の和を S とするとき，次の各問いに答えよ．

(1)　S を a を用いて表せ．

(2)　a が $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で動くときの S の最小値を求めよ．

2　合同な平行四辺形を平面にしきつめて，図のように 2 組の平行線からなる格子を作り，その各交点を格子点と呼ぶ．



図のような 3 つの格子点 O, A, B について $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2$ はすべて整数であるとする．このとき，どの 2 つの格子点 P, Q に対しても $\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2$ は整数となることを示せ．

3　m は実数とし，関数 $f(x)$ を $f(x) = (x^2 - x + m)\sin 3\pi x$ $(0 < x < 1)$ とする．このとき，$f(a) = 0$ となる a $(0 < a < 1)$ のうち，$x = a$ を境目にして関数 $f(x)$ の符号が変化するものの個数を求めよ．

4　連立不等式 $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \leqq \dfrac{1}{3}$，$x > 3$，$y > 3$ の表す領域を D とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1)　D を図示せよ．

(2)　D 内を (x, y) が動くとき $2x + y$ のとる値の最小値を求めよ．また，そのときの x, y の値を求めよ．

5　t は $-1, 0, 1$ のいずれとも異なる実数とする．行列 A を $A = \begin{pmatrix} t^2 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくとき，次の各問いに答えよ．

(1)　3×3 行列 X で $AX = tXA$ をみたすものをすべて求め，X^3 が零行列となることを示せ．

(2)　X は $AX = tXA$ をみたす 3×3 行列であるとする．2 以上の自然数 n に対して

$$(X + A)^n = A^n + b_n XA^{n-1} + c_n X^2 A^{n-2}$$

と書けることを示し，b_{n+1}, c_{n+1} を b_n, c_n を用いて表せ．ただし，A^0 は 3 次の単位行列を表すものとする．

♠ 文系学部

1 　2 の倍数でも 3 の倍数でもない自然数全体を小さい順に並べてできる数列を $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1)　1003 は数列 $\{a_n\}$ の第何項か．

(2)　a_{2000} の値を求めよ．

(3)　m を自然数とするとき，数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $2m$ 項までの和を求めよ．

2 　理系学部 **2** と同じ．

3 　a, b, c, d は実数として，x の整式 $f(x), g(x)$ が以下の条件をみたしているとする．

$$f(x)+g(x)=ax^3+bx^2+cx+d \quad \cdots\cdots \quad ①$$

$$f'(x)+g'(x)=bx^2+cx+d \quad \cdots\cdots \quad ②$$

$$\int_a^x \{f(t)-g(t)\}\,dt=x^3-ax^2+ax-2 \quad \cdots\cdots \quad ③$$

このとき $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1 標準 $\boxed{\mathrm{III}}$ 積分法の応用

2 標準 $\boxed{\mathrm{B}}$ ベクトル（平面）

3 やや難 $\boxed{\mathrm{I}}$ 2 次関数・$\boxed{\mathrm{II}}$ 三角関数

4 標準 $\boxed{\mathrm{III}}$ 微分法の応用

5 やや難 $\boxed{\mathrm{C}}$ 行列

♣ 文系学部

1 標準 $\boxed{\mathrm{A}}$ 数列

2 標準 $\boxed{\mathrm{B}}$ ベクトル（平面）

3 標準 $\boxed{\mathrm{II}}$ 微分積分

略解

◇ 理系学部

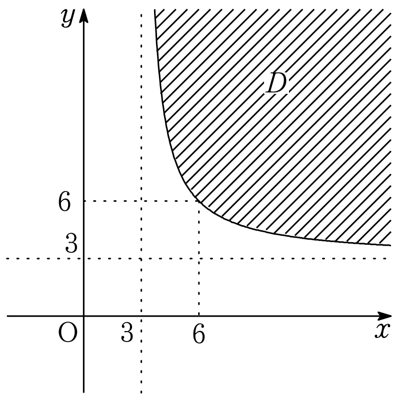
1 (1) $S=-2\sin a+a+1$

(2) 最小値：$\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}+1\quad\left(a=\dfrac{\pi}{3}\right)$

2 証明は省略

3
$$\begin{cases} m \leqq 0,\ \dfrac{1}{4} \leqq m \text{ のとき} & 2\text{ 個} \\ 0<m<\dfrac{2}{9},\ \dfrac{2}{9}<m<\dfrac{1}{4} \text{ のとき} & 4\text{ 個} \\ m=\dfrac{2}{9} \text{ のとき} & 0\text{ 個} \end{cases}$$

4 (1) 領域 D は右図斜線部分で境界線上の点を含む．



(2) 最小値：$9+6\sqrt{2}$，　$\mathrm{P}\left(3+\dfrac{3}{\sqrt{2}},\ 3+3\sqrt{2}\right)$

5 (1) $X=\begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$；$x,\ y$ は任意．証明は省略

(2) 証明は省略．$b_{n+1}=tb_n+1,\quad c_{n+1}=t^2c_n+b_n$

◇ 文系学部

1 (1) 第 335 項

(2) $a_{2000}=5999$

(3) $6m^2$

2 理系学部 **2** と同じ．

3
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x^3+\dfrac{3}{2}(\sqrt{2}+1)x^2+2\sqrt{2}x+\dfrac{7\sqrt{2}}{2} \\ g(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x^3+\dfrac{3}{2}(\sqrt{2}-1)x^2+4\sqrt{2}x+\dfrac{5\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

または

$$\begin{cases} f(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x^3+\dfrac{3}{2}(-\sqrt{2}+1)x^2-2\sqrt{2}x-\dfrac{7\sqrt{2}}{2} \\ g(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x^3+\dfrac{3}{2}(-\sqrt{2}-1)x^2-4\sqrt{2}x-\dfrac{5\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$