◀1995 年　神戸大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　$-\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2}{3}\pi$ を満たす実数 θ に対して，行列 $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ による 1 次変換が点 $\mathrm{P}(1,\ \sqrt{3})$ を点 Q に移すものとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1)　三角形 OPQ の面積 $S(\theta)$ を求めよ．ただし，O は原点である．

(2)　$S(\theta)$ を最大にするような θ を求めよ．

2　四面体 OABC があり，$\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{AOC} = 90^\circ$，$\angle\mathrm{BOC} = 60^\circ$，辺 OA, OB, OC の長さはそれぞれ $a,\ a,\ 2$ である．このとき，点 O から三角形 ABC を含む平面に下ろした垂線とその平面の交点を P とするとき，P が三角形 ABC の内部（辺上を含む）にあるための a の条件を求めよ．

3　数列 $\{x_n\}$ が

$$x_{n+3} = x_n + x_{n+1} + x_{n+2} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

を満たすとき，数列 $\{x_n\}$ は性質（F）を持つということにする．このとき，次の各問に答えよ．

(1)　数列 $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ がともに性質（F）を持つならば，α, β を実数とするとき数列 $\{\alpha u_n + \beta v_n\}$ は性質（F）を持つことを示せ．

(2)　数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ は性質（F）を持ち，数列 $\{a_n\}$ の初めの 3 項は順に 1, 0, 0，数列 $\{b_n\}$ の初めの 3 項は順に 0, 1, 0，数列 $\{c_n\}$ の初めの 3 項は順に 0, 0, 1 である．このとき，性質（F）を持つ数列 $\{y_n\}$ は，ある実数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を選んで，$\{\alpha a_n + \beta b_n + \gamma c_n\}$ と表すことができることを示せ．

(3)　数列 $\{d_n\}$, $\{e_n\}$, $\{f_n\}$ は性質（F）を持ち，数列 $\{d_n\}$ の初めの 3 項は順に 0, 1, 1，数列 $\{e_n\}$ の初めの 3 項は順に 1, 1, 0，数列 $\{f_n\}$ の初めの 3 項は順に 1, 0, -1 である．このとき，性質（F）を持ち，初めの 3 項が 1, 1, 1 である数列 $\{h_n\}$ は，どのように実数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を選んでも，$\{\alpha d_n + \beta e_n + \gamma f_n\}$ と表すことができないことを示せ．

4　次の各問に答えよ．

(1)　t の関数 y で $\dfrac{d}{dt}(e^t y) = \cos t$ を満たすものを求めよ．

(2)　xy 平面上を運動する 2 つの点 P と Q がある．時刻 t における点 P の位置は $(-1,\ e^{-t}\cos t)$ である．また時刻 t における点 Q の速度ベクトルは $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ に等しく，$t = 0$ のときの点 Q の位置は $(1,\ 0)$ である．このとき，次の各問に答えよ．

(i)　時刻 t における点 Q の位置を求めよ．

(ii)　$t \geqq 0$ のとき，点 Q の y 座標が最大となる時刻と，そのときの点 Q の位置を求めよ．

5　箱の中に 1 から n までの整数が 1 つずつ書いてある n 枚のカードが入っている．この箱から 1 枚のカードを取り出し，その数を読んで，もとに戻してよくかき混ぜる．この試行を 3 回繰り返したとき，取り出したカードに書かれている数の最大値と，3 つの数の和を考える．最大値が 7 であったときに，和が 15 である確率を求めよ．

♠ 文系学部

1　理系学部 **1** と同じ．

2　放物線 $y=x^2$ 上に異なる2点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$, $\mathrm{B}(b,\ b^2)$ $(a>0,\ b<0)$ をとり，A, B における接線をそれぞれ ℓ, m とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1)　この放物線と2接線 ℓ, m によって囲まれた部分の面積を S とするとき，S を a と b の式で表せ．

(2)　直線 ℓ を原点の周りに 45° 回転して得られる直線を ℓ' とするとき，ℓ' の方程式を求めよ．

(3)　接線 m が直線 ℓ' と平行であるとき，面積 S を a のみの式で表せ．また，a の動く範囲が $a>\dfrac{1}{2}$ のとき，S の最小値とそのときの a の値を求めよ．

3　自然数 n について，

$$T_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$

とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1)　$n\geqq 2$ ならば，不等式 $\dfrac{7}{12}\leqq T_n$ が成り立つことを示せ．

(2)　等式 $T_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2n}$ が成り立つことを示せ．

(3)　不等式 $T_n\leqq\dfrac{n}{n+1}$ が成り立つことを示せ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　|基本|　代幾 行列・1次変換

2　|標準|　代幾 ベクトル

3　|標準|　基解 数列

4　|やや難|　微積 積分法の応用・微分方程式

5　|基本|　確統 確率

♣ 文系学部

1　|基本|　代幾 行列・1次変換

2　|標準|　基解 微分積分・代幾 行列・1次変換

3　|標準|　基解 数列

略解

◇ 理系学部

1 (1) $S(\theta)=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$ 　$\left(S(\theta)=2\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)\text{ でも可}\right)$

(2) $\theta=\frac{\pi}{6}$

2 $1\leqq a\leqq 4$

3 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

4 (1) $y=e^{-t}\sin t+Ce^{-t}$ 　（C は任意定数）

(2) (i) $\mathrm{Q}(2e^{-t}-1,\ e^{-t}\sin t)$

(ii) $\mathrm{Q}\left(2e^{-\frac{\pi}{4}}-1,\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}\right)$

5 $\frac{18}{127}$

◇ 文系学部

1 理系学部 **1** と同じ.

2 (1) $S=\frac{1}{12}(a-b)^3$

(2) $(2a+1)x+(2a-1)y-\sqrt{2}a^2=0$

(3) $S=\frac{1}{96}\left(\frac{4a^2+1}{2a-1}\right)^3$

最小値：$\frac{7+5\sqrt{2}}{12}$ 　$\left(a=\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$

3 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略