◀2017 年　北海道大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　自然数の 2 乗となる数を平方数という．

(1)　自然数 $a,\ n,\ k$ に対して，$n(n+1)+a=(n+k)^2$ が成り立つとき，

$$a \geqq k^2+2k-1$$

が成り立つことを示せ．

(2)　$n(n+1)+14$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ．

2　関数 $f(x)=1+\sin x-x\cos x$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　$f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 2\pi$ における増減を調べ，最大値と最小値を求めよ．

(2)　$f(x)$ の不定積分を求めよ．

(3)　次の定積分の値を求めよ．

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx$$

3　複素数平面上に 3 点 O, A, B を頂点とする △OAB がある．ただし，O は原点とする．△OAB の外心を P とする．3 点 A, B, P が表す複素数を，それぞれ $\alpha,\ \beta,\ z$ とするとき，

$$\alpha\beta=z$$

が成り立つとする．

(1)　複素数 α の満たすべき条件を求め，点 A(α) が描く図形を複素数平面上に図示せよ．

(2)　点 P(z) の存在範囲を求め，複素数平面上に図示せよ．

4　さいころを続けて投げて，数直線上の点 P を移動させるゲームを行う．初め点 P は原点 0 にいる．さいころを投げるたびに，出た目の数だけ，点 P を現在の位置から正の向きに移動させる．この試行を続けて行い，点 P が 10 に達するか超えた時点でゲームを終了する．n 回目の試行でゲームが終了する確率を p_n とする．

(1)　$p_{10}=\left(\dfrac{1}{6}\right)^9$ となることを示せ．

(2)　p_9 の値を求めよ．

(3)　p_3 の値を求めよ．

5　座標平面上の 3 点 A(1, 0), B(3, 1), C(2, 2) を頂点とする △ABC の内部および境界を T とおく．実数 a に対して，条件

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2 \leqq a$$

を満たす座標平面上の点 P の全体を D とする．ただし，AP は点 A と点 P の距離を表す．

(1)　D が少なくとも 1 つの点 P を含むような a の値の範囲を求めよ．

(2)　D が T を含むような a の値の範囲を求めよ．

(3)　(1) のもとで，D が T に含まれるような a の値の範囲を求めよ．

♠ 文系学部

1 自然数の 2 乗となる数を平方数という.

(1) 自然数 a, n, k に対して，$n(n+1)+a=(n+k)^2$ が成り立つとき，

$$a \geqq k^2+2k-1$$

が成り立つことを示せ.

(2) $n(n+1)+7$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ.

2 平面上の点 O を中心とする半径 1 の円を C とする．円 C の内部に点 A がある．円 C の周上を 2 点 P, Q が条件 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を満たしながら動く．線分 PQ の中点を R とする．また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\left|\vec{a}\right|=r$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$ とする．ただし，$0<r<1$ とする.

(1) $\left|\overrightarrow{\mathrm{AR}}\right|^2$ を内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ を用いて表せ.

(2) 直線 OA 上の点 B で，$\left|\overrightarrow{\mathrm{BR}}\right|^2$ が 2 点 P, Q の位置によらず一定であるものを求めよ．また，このときの $\left|\overrightarrow{\mathrm{BR}}\right|^2$ の値を r を用いて表せ.

3 正四面体 ABCD の頂点を移動する点 P がある．点 P は，1 秒ごとに，隣の 3 頂点のいずれかに等しい確率 $\dfrac{a}{3}$ で移るか，もとの頂点に確率 $1-a$ で留まる．初め頂点 A にいた点 P が，n 秒後に頂点 A にいる確率を p_n とする．ただし，$0<a<1$ とし，n は自然数とする.

(1) 数列 $\{p_n\}$ の漸化式を求めよ.

(2) 確率 p_n を求めよ.

4 a, b を実数とし，関数 $f(x)$ が

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+(a^2-b)x+\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$$

を満たすとする.

(1) $f(0)$ の値を a を用いて表せ.

(2) 関数 $f(x)$ が $x>1$ の範囲で極大値を持つとする．このような a, b が満たす条件を求めよ．また，点 $\mathrm{P}(a, b)$ の存在範囲を座標平面上に図示せよ.

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1** ｜分析中｜ $\boxed{\text{A}}$ 整数の性質・$\boxed{\text{II}}$ 式と証明
- **2** ｜分析中｜ $\boxed{\text{III}}$ 微分法・積分法
- **3** ｜分析中｜ $\boxed{\text{III}}$ 複素数平面
- **4** ｜分析中｜ $\boxed{\text{A}}$ 確率
- **5** ｜分析中｜ $\boxed{\text{II}}$ 図形と方程式

♣ 文系学部

- **1** ｜分析中｜ $\boxed{\text{A}}$ 整数の性質・$\boxed{\text{II}}$ 式と証明
- **2** ｜分析中｜ $\boxed{\text{B}}$ ベクトル（平面）
- **3** ｜分析中｜ $\boxed{\text{A}}$ 確率・$\boxed{\text{B}}$ 数列
- **4** ｜分析中｜ $\boxed{\text{II}}$ 微分積分

✎**注:** 出題範囲は分析中のため変更される場合があります.