◀2012 年　北海道大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　k は実数，a, b, c, d は $ad - bc = 1$ を満たす実数とする．行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の表す移動は以下の 3 条件を満たすとする．

(イ)　直線 $y = x$ 上の点は直線 $y = x$ 上の点に移る．

(ロ)　直線 $y = -x$ 上の点は直線 $y = -x$ 上の点に移る．

(ハ)　x 軸上の点は直線 $y = kx$ 上の点に移る．

(1)　k のとりうる値の範囲を求めよ．

(2)　A を k で表せ．

2　$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で定義された関数

$$f(\theta) = 4\cos 2\theta \sin\theta + 3\sqrt{2}\cos 2\theta - 4\sin\theta$$

を考える．

(1)　$x = \sin\theta$ とおく．$f(\theta)$ を x で表せ．

(2)　$f(\theta)$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ．

(3)　方程式 $f(\theta) = k$ が相異なる 3 つの解をもつような実数 k の値の範囲を求めよ．

3　次の問に答えよ．

(1)　$x \geqq 0$ のとき，$x - \dfrac{x^3}{6} \leqq \sin x \leqq x$ を示せ．

(2)　$x \geqq 0$ のとき，$\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{30} \leqq \displaystyle\int_0^x t\sin t\,dt \leqq \dfrac{x^3}{3}$ を示せ．

(3)　極限値

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$$

を求めよ．

4　実数 a, b に対して，$f(x) = x^2 - 2ax + b$, $g(x) = x^2 - 2bx + a$ とおく．

(1)　$a \neq b$ のとき，$f(c) = g(c)$ を満たす実数 c を求めよ．

(2)　(1) で求めた c について，a, b が条件 $a < c < b$ を満たすとする．このとき，連立不等式

$$f(x) < 0 \text{ かつ } g(x) < 0$$

が解をもつための必要十分条件を a, b を用いて表せ．

(3)　一般に $a < b$ のとき，連立不等式

$$f(x) < 0 \text{ かつ } g(x) < 0$$

が解をもつための必要十分条件を求め，その条件を満たす点 (a, b) の範囲を ab 平面上に図示せよ．

5　A と B の 2 チームが試合を行い，どちらかが先に k 勝するまで試合をくり返す．各試合で A が勝つ確率を p, B が勝つ確率を q とし，$p+q=1$ とする．A が B より先に k 勝する確率を P_k とおく．

(1)　P_2 を p と q で表せ．

(2)　P_3 を p と q で表せ．

(3)　P_4 を p と q で表せ．

(4)　$\dfrac{1}{2} < q < 1$ のとき，$P_4 < P_3$ であることを示せ．

♠ 文系学部

1　$m>0,\ n>0,\ 0<x<1$ とする．$\triangle$OAB の辺 OA を $m:n$ に内分する点を P，辺 OB を $n:m$ に内分する点を Q とする．また，線分 AQ を $1:x$ に外分する点を S，線分 BP を $1:x$ に外分する点を T とする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\vec{a},\ \vec{b},\ m,\ n,\ x$ で表せ．

(2)　3 点 O, S, T が一直線上にあるとき，x を $m,\ n$ で表せ．

2　$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で定義された関数

$$f(\theta)=4\cos 2\theta\sin\theta+3\sqrt{2}\cos 2\theta-4\sin\theta$$

を考える．

(1)　$x=\sin\theta$ とおく．$f(\theta)$ を x で表せ．

(2)　$f(\theta)$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ．

3　xy 平面上に 3 点 $\mathrm{A}(a,\ b),\ \mathrm{B}(a+3,\ b),\ \mathrm{C}(a+1,\ b+2)$ がある．不等式 $y \geqq x^2$ の表す領域を D，不等式 $y \leqq x^2$ の表す領域を E とする．

(1)　点 C が領域 D に含まれ，点 A と点 B が領域 E に含まれるような $a,\ b$ の条件を連立不等式で表せ．

(2)　(1) で求めた条件を満たす点 $(a,\ b)$ の領域 F を ab 平面上に図示せよ．

(3)　(2) で求めた領域 F の面積を求めよ．

4　A と B の 2 チームが試合を行い，どちらかが先に k 勝するまで試合をくり返す．各試合で A が勝つ確率を p, B が勝つ確率を q とし，$p+q=1$ とする．A が B より先に k 勝する確率を P_k とおく．

(1)　P_2 を p と q で表せ．

(2)　P_3 を p と q で表せ．

(3)　$\dfrac{1}{2} < q < 1$ のとき，$P_3 < P_2$ であることを示せ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1 標準 C 行列

2 標準 II 三角関数・微分積分

3 標準 III 関数の極限・積分法

4 標準 I 不等式の証明

5 標準 A 確率

♣ 文系学部

1 標準 B ベクトル（平面）

2 標準 II 三角関数

3 標準 II 微分積分

4 標準 A 確率

略解

◇ 理系学部

1　(1)　$-1 < k < 1$

(2)　$A = \pm \dfrac{1}{\sqrt{1-k^2}} \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}$

2　(1)　$f(\theta) = -8x^3 - 6\sqrt{2}x^2 + 3\sqrt{2}$　$(-1 \leqq x \leqq 1)$

(2)　$\begin{cases} \text{最大値}：3\sqrt{2} & (\theta = 0) \\ \text{最小値}：-8-3\sqrt{2} & \left(\theta = \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

(3)　$2\sqrt{2} < k \leqq 8 - 3\sqrt{2}$

3　(1)　証明は省略

(2)　証明は省略

(3)　$\dfrac{1}{3}$

4　(1)　$c = -\dfrac{1}{2}$

(2)　$a + b + \dfrac{1}{4} < 0$

(3)

$a < -\dfrac{1}{2} < b$ かつ $a + b + \dfrac{1}{4} < 0$

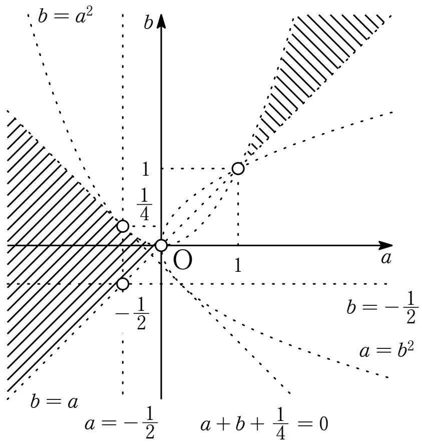
または

$-\dfrac{1}{2} \leqq a < b$ かつ $b < a^2$

または

$a < b \leqq -\dfrac{1}{2}$ かつ $a < b^2$

右図斜線部分で，境界線上の点は含まない．



5　(1)　$P_2 = p^2(1 + 2q)$

(2)　$P_3 = p^3(1 + 3q + 6q^2)$

(3)　$P_4 = p^4(1 + 4q + 10q^2 + 20q^3)$

(4)　証明は省略

◇ 文系学部

1 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \dfrac{-x}{1-x}\vec{a} + \dfrac{n}{(1-x)(m+n)}\vec{b}$

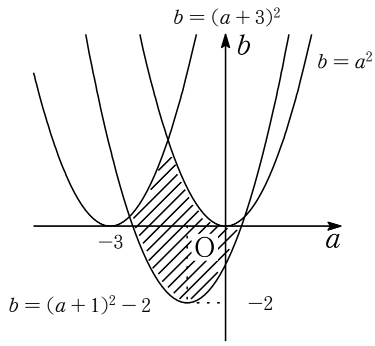
(2) $x = \dfrac{\sqrt{mn}}{m+n}$

2 (1) $f(\theta) = -8x^3 - 6\sqrt{2}x^2 + 3\sqrt{2}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$

(2)
$$\begin{cases} \text{最大値 : } 3\sqrt{2} & (\theta = 0) \\ \text{最小値 : } -8-3\sqrt{2} & \left(\theta = \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

3 (1)
$$\begin{cases} b \geqq (a+1)^2 - 2 \\ b \leqq a^2 \\ b \leqq (a+3)^2 \end{cases}$$

(2) 右図斜線部分で，境界線上の点を含む.



(3) 6

4 (1) $P_2 = p^2(1+2q)$

(2) $P_3 = p^3(1+3q+6q^2)$

(3) 証明は省略