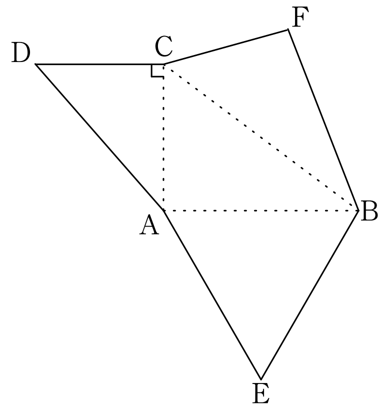
◀2009 年　北海道大学（前期）▶

♠ 理系学部

1 図はある三角錐 V の展開図である．ここで $\mathrm{AB}=4$, $\mathrm{AC}=3$, $\mathrm{BC}=5$, $\angle \mathrm{ACD}=90^\circ$ で $\triangle \mathrm{ABE}$ は正三角形である．このとき，V の体積を求めよ．



2 直角三角形 $\triangle \mathrm{ABC}$ において $\angle \mathrm{B}$ は直角であるとし，辺 AC の長さを α とする．辺 AC を n 等分し，その分点を A に近い方から順に $\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \mathrm{D}_3, \cdots, \mathrm{D}_{n-1}$ とおく．$1 \leqq k \leqq n-1$ に対し，線分 BD_k の長さを L_k とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $S_n=\sum_{k=1}^{n-1}(L_k)^2$ を α と n で表せ．

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$ を α で表せ．

3 $t>0$ とし，$x=t$ で表される直線を l_1 とする．$y=\frac{x^2}{4}$ で表される放物線を C とおく．C と l_1 の共有点 $\left(t,\ \frac{t^2}{4}\right)$ における C の接線を l_2 とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) l_1 と l_2 のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を求めよ．ただし，$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ とする．

(2) l_1 を l_2 に関して対称移動させた直線を l_3 とおくとき，l_3 の方程式を求めよ．

(3) l_3 は t によらない定点を通ることを示せ．

(4) l_3 と C の 2 つの共有点を P, Q とする．線分 PQ の長さが最小になるような t の値を求めよ．

4 $0<a<1$, $0<\theta<\pi$ とする．4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(a,\ 0)$, $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$, $\mathrm{Q}(x,\ y)$ が条件

$$\mathrm{OQ}=\mathrm{AQ}=\mathrm{PQ}$$

をみたすとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 点 Q の座標を a と θ で表せ．

(2) a を固定する．$0<\theta<\pi$ の範囲で θ が動くとき，y の最小値を求めよ．

5 自然数 n に対して

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{2n}\,dx$$

とおく．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) a_1 を求めよ．

(2) a_{n+1} を a_n で表せ．

(3) $\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ．

(4) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$ を求めよ．

♠ 文系学部

1 $\gamma = 1 + \sqrt{3}i$ とする．ただし，i は虚数単位である．実数 a, b に対して多項式 $P(x)$ を

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 8(\sqrt{3}+1)x + 16$$

で定める．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$P(\gamma) = 0$ となるように a と b を定めよ．

(2)　(1) で定めた a と b に対して，$P(x) = 0$ となる複素数 x で γ 以外のものをすべて求めよ．

2 座標平面上の点 (a, b) で a と b のどちらも整数となるものを格子点と呼ぶ．$y = 3x^2 - 6x$ で表される放物線を C とする．n を自然数とし，C 上の点 $\mathrm{P}(n, 3n^2 - 6n)$ をとる．原点を $\mathrm{O}(0, 0)$ とする．C と線分 OP で囲まれる図形を D とする．ただし，D は境界を含むとする．$0 \leqq k \leqq n$ をみたす整数 k に対して，直線 $x = k$ 上にあり D に含まれる格子点の個数を $f(k)$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$f(k)$ を求めよ．

(2)　D に含まれる格子点の総数を求めよ．

(3)　$f(k)$ が最大になるような k を求めよ．

3 実数 $t > 0$ に対して，座標平面上に点 $\mathrm{P}(t, 0)$，点 $\mathrm{Q}(2t, 1-4t^2)$，点 $\mathrm{R}(-t, 1-t^2)$ をとる．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　P, Q, R が一直線上にあるような t の値を求めよ．

(2)　(1) で求めた値を t_0 とする．$0 < t < t_0$ のとき，三角形 $\triangle$PQR の面積 $S(t)$ の最大値とそのときの t の値を求めよ．

4 理系学部 **1** と同じ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　標準　I　空間図形

2　標準　III　数列の極限

3　標準　II　図形と方程式・微分積分

4　標準　II　三角関数

5　標準　III　数列の極限・積分法

♣ 文系学部

1　標準　II　複素数と方程式

2　標準　B　数列

3　標準　II　微分積分

4　標準　I　空間図形

略解

◇ 理系学部

1　$2\sqrt{3}$

2　(1)　$S_n = \dfrac{(n-1)(2n-1)}{6n}\alpha^2$

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{1}{3}\alpha^2$

3　(1)　$\cos\theta = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+4}}$

(2)　$y = \dfrac{t^2-4}{4t}x + 1$

(3)　証明は省略

(4)　$t = 2$

4　(1)　$\mathrm{Q}\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{1-a\cos\theta}{2\sin\theta}\right)$

(2)　$\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{2}$

5　(1)　$a_1 = 1 - \dfrac{\pi}{4}$

(2)　$a_{n+1} = -a_n + \dfrac{1}{2n+1}$

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$

◇ 文系学部

1　(1)　$a = -2-2\sqrt{3},\quad b = 8+4\sqrt{3}$

(2)　$x = 1-\sqrt{3}i,\quad \sqrt{3}\pm i$

2　(1)　$f(k) = -3k^2+3nk+1$

(2)　$\dfrac{1}{2}(n+1)(n^2-n+2)$

(3)
$$\begin{cases} n\text{ が偶数のとき，}\quad k = \dfrac{n}{2} \\ n\text{ が奇数のとき，}\quad k = \dfrac{n\pm 1}{2} \end{cases}$$

3　(1)　$t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(2)　$t = \dfrac{1}{3}$ のとき，最大値 $\dfrac{1}{3}$

4　理系学部 **1** と同じ.