◀2007 年　北海道大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　方程式 $x^2+y^2-4y+2=0$ で定義される円 C を考える．

(1)　点 A $(-\sqrt{2},\,0)$ と点 O$(0,\,0)$ を通り，円 C に接する円の中心の座標を求めよ．

(2)　点 P が円 C 上を動くとき，$\cos\angle\mathrm{APO}$ の最大値と最小値を求めよ．

2　4 枚のカードがあって，1 から 4 までの整数がひとつずつ書かれている．このカードをよく混ぜて，1 枚引いては数字を記録し，カードを元に戻す．この試行を n 回繰り返し，記録した順に数字を並べて得られる数列を，$a_1,\,a_2,\,\cdots,\,a_n$ とする．

(1)　条件 $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = j$ を満たす数列が $A_n(j)$ 通りあるとする．ただし，$j=1,\,2,\,3,\,4$ とする．

　(ｉ)　$A_n(1),\,A_n(2)$ を求めよ．

　(ii)　$n \geqq 2$ のとき，$A_n(j)$ $(j=3,\,4)$ を $A_{n-1}(1),\,A_{n-1}(2),\,\cdots,\,A_{n-1}(j)$ で表し，$A_n(3),\,A_n(4)$ を求めよ．

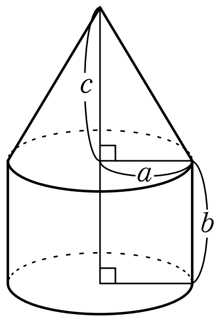
(2)　$n \geqq 2$ のとき，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ かつ $a_{n-1} > a_n$ となる確率を求めよ．

3　xy 平面上の曲線 $y=xe^x$ と x 軸および 2 直線 $x=n,\,x=n+1$ で囲まれる図形を D_n とする．ただし，n を自然数とする．

(1)　図形 D_n の面積を S_n として，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{ne^n}$ を求めよ．

(2)　図形 D_n を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_n として，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{V_n}{(S_n)^2}$ を求めよ．

4　図のような，半径 a の円を底面とする高さ b の円柱の上に，同じ大きさの円を底面とする高さ c の直円錐の屋根をのせてできる建物を考える．



(1)　V をこの建物の体積，S をこの建物の外側の表面積（底面は除く）とする．
　V と S を $a,\,b,\,c$ で表せ．

(2)　V を一定に保ちながら $a,\,b,\,c$ を動かして，S を最小にしたい．

　(ｉ)　$b=xa,\,c=ya$ とおき，V と a を一定としたとき，S の最小値 T を V と a で表せ．

　(ii)　T が最小となるときの比 $a:b:c$ を求めよ．

5　楕円 $C_1:\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ と双曲線 $C_2:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を考える．C_1 と C_2 の焦点が一致しているならば，C_1 と C_2 の交点でそれぞれの接線は直交することを示せ．

♠ 文系学部

1　$a,\,b$ を実数とする．方程式 $x^2+ax+b=0$ が実数解をもち，すべての解の絶対値が 1 以下であるとする．

(1)　この条件を満たす点 $(a,\,b)$ 全体を ab 平面上に図示せよ．

(2)　$a+2b$ の最大値と最小値を求めよ．

2 方程式 $x^2+y^2-4y+2=0$ で定義される円 C を考える．

(1) 点 A $(-\sqrt{2}, 0)$ と点 O$(0, 0)$ を通り中心の座標が $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ および $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 2\right)$ である 2 つの円は，どちらも円 C に接することを示せ．

(2) 点 P が円 C 上を動くとき，$\cos\angle\mathrm{APO}$ の最大値と最小値を求めよ．

3 数 1, 2, 3 を重複を許して n 個並べてできる数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ を考える．

(1) 条件 $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = j$ を満たす数列が $A_n(j)$ 通りあるとする．ただし，$j=1, 2, 3$ とする．

（i） $A_n(1), A_n(2)$ を求めよ．

（ii） $n \geqq 2$ のとき，$A_n(3)$ を $A_{n-1}(1), A_{n-1}(2), A_{n-1}(3)$ で表し，$A_n(3)$ を求めよ．

(2) $n \geqq 2$ のとき，条件

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1} \text{ かつ } a_{n-1} > a_n$$

を満たす数列は何通りあるか．

4 $a>0, b \geqq 0, 0<p<1$ とし，関数 $y=ax-bx^2$ のグラフは定点 P(p, p^2) を通るとする．このグラフの $0 \leqq x \leqq p$ に対応する部分を C で表す．

(1) b を a と p を用いて表せ．

(2) a が範囲 $p \leqq a \leqq 1$ を動くとき，C 上の点 (x, y) の動く領域を D とする．

（i） x を固定して y の動く範囲を求めよ．

（ii） D を図示せよ．

(2) D の面積 S を p で表し，$\dfrac{1}{2} \leqq p \leqq \dfrac{3}{4}$ の範囲で S の最大値と最小値を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1** やや難　II 図形と方程式（円）
- **2** 標準　A 場合の数・確率
- **3** 標準　III 極限・積分法の応用（面積・回転体の体積）
- **4** やや難　III 微分法の応用（空間図形・最大最小）
- **5** 標準　C いろいろな曲線（楕円・双曲線）

♣ 文系学部

- **1** 基本　II 図形と方程式（線形計画法）
- **2** 標準　II 図形と方程式（円）・理系 **1** を改題
- **3** 標準　A 場合の数・確率・理系 **2** を改題
- **4** 標準　II 図形と方程式（領域図示）・微分積分（面積の最大最小）

略解

◇ 理系学部

1 (1) $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\,0\right)$，$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\,2\right)$

(2) 最大値 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，最小値 0

2 (1) (i) $A_n(1)=1,\ A_n(2)=n$

(ii) $A_n(3)=A_{n-1}(1)+A_{n-1}(2)+A_{n-1}(3)=\dfrac{1}{2}n(n+1)$

$A_n(4)=A_{n-1}(1)+A_{n-1}(2)+A_{n-1}(3)+A_{n-1}(4)=\dfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

(2) $\dfrac{(n-1)(n+1)(n+2)}{2\cdot 4^n}$

3 (1) $e-1$

(2) $\dfrac{\pi(e+1)}{2(e-1)}$

4 (1) $V=\pi a^2b+\dfrac{1}{3}\pi a^2c,\ S=2\pi ab+\pi a\sqrt{a^2+c^2}$

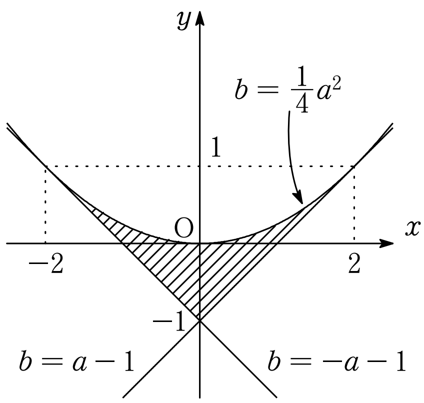
(2) (i) $\begin{cases} ① & \dfrac{2}{\sqrt{5}}<\dfrac{3V}{\pi a^3}\ \text{のとき,}\quad T=\dfrac{\sqrt{5}}{3}\pi a^2+\dfrac{2V}{a} \\ ② & \dfrac{2}{\sqrt{5}}\geqq\dfrac{3V}{\pi a^3}\ \text{のとき,}\quad T\ \text{は存在しない.} \end{cases}$

(ii) $a:b:c=\sqrt{5}:1:2$

5 (1) 証明は省略

◇ 文系学部

1 (1) $\begin{cases} b\leqq\dfrac{a^2}{4} \\ b\geqq a-1 \\ b\geqq -a-1 \\ -2\leqq a\leqq 2 \end{cases}$ （境界線上の点を含む）



(2) $\begin{cases} \text{(i)}\ (a,b)=(2,1)\ \text{のとき,}\quad \text{最大値 } 4 \\ \text{(ii)}\ (a,b)=(0,-1)\ \text{のとき,}\quad \text{最小値 } -2 \end{cases}$

2 (1) 証明は省略

(2) 最大値 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，最小値 0

3 (1) (i) $A_n(1)=1,\ A_n(2)=n$

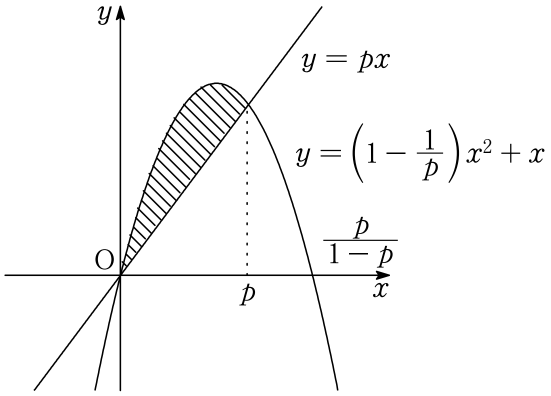
(ii) $A_n(3)=A_{n-1}(1)+A_{n-1}(2)+A_{n-1}(3)=\frac{1}{2}n(n+1)$

(2) $(n-1)(n+1)$

4 (1) $b=\frac{a}{p}-1$

(2) (i) $px \leqq y \leqq \left(1-\frac{1}{p}\right)x^2+x$

(ii) 境界線上の点を含む



(3)
$$\begin{cases} \text{(i)}\ S\ \text{の最大値}\ \frac{2}{81},\quad \left(p=\frac{2}{3}\right) \\ \text{(ii)}\ S\ \text{の最小値}\ \frac{1}{48},\quad \left(p=\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$