◀1995 年　北海道大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　1 次変換 f は点 $(1,\,2)$ を点 $\mathrm{P}(a,\,1-a)$ に移す．また点 $(-2,\,1)$ の像を Q とするとき，$\angle\mathrm{POQ}$ は直角で，線分 OP と OQ の長さは等しいとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　f を表す行列 A を a を用いて表せ．

(2)　f が回転となるとき，A を定めよ．

2　平面において，次の 2 本の直線 l と m を考える．ただし $\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ である．

$$l : y=\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)x,\quad m : y=-x+\sqrt{2}\left(1-\frac{2}{\pi}\theta\right)$$

l と m の交点を $(x(\theta),\,y(\theta))$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　$y(\theta)$ を求めよ．

(2)　$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1+\tan\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}t\right)}{t}$ を求めよ．

(3)　$\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}y(\theta)$ を求めよ．

3　$f(x)=\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}-\sin x$ とする．$f(x)=0$ となる x は $0\leqq x\leqq\pi$ の範囲にはちょうど 2 個存在し，1 個は区間 $\left[0,\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ に，1 個は区間 $\left[\dfrac{\pi}{2},\,\pi\right]$ にあることを示せ．

4　関数 $f(x)$ は $x>0$ で定義され，

$$(*)\quad \int_1^x (t+x)f(t)\,dt=4x-4$$

をみたす．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$(*)$ の両辺を微分し，$y=\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$ のみたす微分方程式を求めよ．

(2)　$f(x)$ を求めよ．

5　座標平面上の原点から次の規則で動く．
格子点（原点を含む）ではコインを投げ，表がでれば x 軸の正の方向に 1，裏がでれば y 軸の正の方向に 1 進む．
コインを N 回投げ，長さが N だけ進むあいだに，直線 $x=2$ 上を長さ 1 以上通過する確率を P_N とする．このとき，次の問いに答えよ．ただし，コインの表がでる確率，裏がでる確率はいずれも $\dfrac{1}{2}$ とする．また，格子点とは x 座標と y 座標がともに整数となる点のことである．

(1)　P_4 を求めよ．

(2)　$P_N\ (N\geqq 3)$ を求めよ．

(3)　$\displaystyle\lim_{N\to\infty}P_N$ を求めよ．

♠ 文系学部

1　$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ で，$2\cos 2\theta+a\sin 2\theta=1$ のとき，$\tan\theta$ を a を用いて表せ．

2　f を次の行列 A で与えられる 1 次変換とする．

$$A=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

(1)　点 $\mathrm{P}(x,\, y)$, $(x^2+y^2=2)$ が $f(\mathrm{P})=\mathrm{P}$ をみたすとき，P の座標を求めよ．

(2)　点 $\mathrm{P}_0(x_0,\, y_0)$ を出発点とし，点 $\mathrm{P}_n(x_n,\, y_n)$ を $\mathrm{P}_{n+1}=f(\mathrm{P}_n)$ によって順に定める．$(x_0,\, y_0)=(1,\, 1)$ のとき，P_n の座標は $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n,\, \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ となることを示せ．

(3)　$(x_0,\, y_0)=(2,\, 0)$ のとき P_n の座標を求めよ．

3　平面上に 2 つの円

C_1 ： $x^2+y^2=1$

C_2 ： $(x-1)^2+(y-2)^2=R^2$

を考える．ただし，$R>1+\sqrt{5}$ とする．

(1)　円 C_1 は円 C_2 の内部に含まれることを示せ．

(2)　円 C_2 上の点 P を通り，円 C_1 に接する 2 本の直線が点 P においてなす角度を θ とする．また，点 P と原点 O との距離を d とする．このとき，$\cos\theta$ を d を用いて表せ．

(3)　(2) において $\theta=\frac{\pi}{2}$ となるような点 P が円 C_2 上に存在するための R のみたすべき条件を求めよ．

4　曲線 $y=x^2(x+1)$ と直線 $y=k^2(x+1)$ とで囲まれる部分の面積が最小になるように，定数 k の値を定めよ．ただし $0 \leqq k \leqq 1$ とする．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1**　標準　代幾　1 次変換
- **2**　標準　微積　関数の極限
- **3**　やや難　微積　微分法の応用
- **4**　標準　微積　積分法の応用
- **5**　標準　確統　確率

♣ 文系学部

- **1**　標準　基解　三角関数
- **2**　標準　代幾　行列
- **3**　標準　基解　三角関数
- **4**　標準　基解　微分積分

略解

◇ 理系学部

1 (1) $A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2-a & 3a-1 \\ 1-3a & 2-a \end{pmatrix}$, $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3a-2 & 1+a \\ 1+a & 2-3a \end{pmatrix}$

(2) $A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

2 (1) $y(\theta)=\dfrac{\sqrt{2}\left(1-\frac{2}{\pi}\theta\right)\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$

(2) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1+\tan\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}t\right)}{t}=-\pi$

(3) $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} y(\theta)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}$

3 証明は省略

4 (1) $2xy'+y=4$

(2) $f(x)=2x^{-\frac{3}{2}}$

5 (1) $P_4=\frac{1}{4}$

(2) $P_N=\frac{1}{2}-N\left(\frac{1}{2}\right)^N$

(3) $\displaystyle\lim_{N\to\infty}P_N=\frac{1}{2}$

◇ 文系学部

1 $\tan\theta=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2+3}}{3}$

2 (1) $\mathrm{P}(1,\ -1),\ (-1,\ 1)$

(2) 証明は省略

(3) $\mathrm{P}_n\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^n,\ -1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

3 (1) 証明は省略

(2) $\cos\theta=\dfrac{d^2-2}{d^2}$

(3) $\sqrt{5}+1<R\leqq\sqrt{5}+\sqrt{2}$

4 $k=3-2\sqrt{2}$