◀2013 年　広島大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする．座標平面上で原点 O を通り傾きが $\tan\theta$ の直線を ℓ とし，行列

$$\begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

の表す 1 次変換を f とする．座標平面上に 2 点 P, Q がある．次の問いに答えよ．

(1)　線分 OP が直線 ℓ と垂直であるとき，1 次変換 f による点 P の像を求めよ．

(2)　1 次変換 f による点 Q の像を R とする．このとき $\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right| \leqq \left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|$ が成り立つことを示せ．さらに等号が成立する場合を調べよ．

(3)　1 次変換 f による点 $(1, 1)$ の像を S とする．このとき $\left|\overrightarrow{\mathrm{OS}}\right|$ が最大となる θ と最小となる θ をそれぞれ求めよ．

2　座標平面上の点で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という．n を 3 以上の自然数とし，連立不等式

$$x \geqq 0,\quad y \geqq 0,\quad x + y \leqq n$$

の表す領域を D とする．格子点 $\mathrm{A}(a, b)$ に対して，領域 D 内の格子点 $\mathrm{B}(c, d)$ が $|a - c| + |b - d| = 1$ を満たすとき，点 B を点 A の隣接点という．次の問いに答えよ．

(1)　領域 D 内の格子点のうち隣接点の個数が 4 であるものの個数を求めよ．

(2)　領域 D から格子点を 1 つ選ぶとき，隣接点の個数の期待値が 3 以上となるような n の範囲を求めよ．ただし，格子点の選ばれ方は同様に確からしいものとする．

(3)　領域 D から異なる格子点を 2 つ選ぶとき，互いに隣接点である確率を求めよ．ただし，異なる格子点の選ばれ方は同様に確からしいものとする．

3　座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(0, 1)$, $\mathrm{B}(t, 0)$ を考える．ただし，$t \geqq 0$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　線分 AB を 1 辺とする正三角形は 2 つある．それぞれの正三角形について，2 点 A, B 以外の頂点の座標を t を用いて表せ．

(2)　(1) で求めた 2 点のうち x 座標が小さい方を C とする．t を動かすとき，点 C の軌跡を図示せよ．

(3)　k を定数とする．点 B と直線 $y = kx$ 上の点 P をそれぞれうまく選ぶことで 3 点 A, B, P を頂点とする正三角形ができるとき，k の値の範囲を求めよ．

4　平面上の 3 点 O, A, B は $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = 1$ かつ $\angle\mathrm{AOB} = \theta$ $(0 < \theta < \pi)$ を満たすとする．線分 AB の中点を M とする．$t > 1$ として，点 C を $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -t\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ となるように定める．$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を S とする．次の問いに答えよ．

(1)　S を t と θ を用いて表せ．

(2)　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| = 1$ のとき，S を t のみを用いて表せ．

(3)　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| = 1$ のとき，S が最大となる t の値を求めよ．

5　次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底である．

(1)　$x \geqq 2$ のとき，$x^4 e^{-3x} \leqq 16e^{-6}$ を示せ．また，これを用いて $\lim_{x\to\infty} x^3 e^{-3x}$ を求めよ．

(2)　k を定数とする．$x>0$ の範囲で方程式

$$xe^{-3x}=\frac{k}{x^2}$$

がちょうど 2 つの解 $\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$ をもつような k の値の範囲を求めよ．

(3)　(2) の α,β が $\beta=2\alpha$ を満たすとき，曲線 $y=xe^{-3x}\ (x>0)$ と曲線 $y=\dfrac{k}{x^2}\ (x>0)$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

♠ 文系学部

1　放物線 $y=2x^2-8$ を C とする．x 軸上の点 $\mathrm{A}(a,0)$，$(a>0)$ を通り C と接する直線が 2 本あるとき，次の問いに答えよ．

(1)　a の値の範囲を求めよ．

(2)　2 つの接点 P, Q の x 座標をそれぞれ $\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$ とする．$\beta-\alpha=3$ のとき，a の値と 2 本の接線の方程式を求めよ．

(3)　(2) で求めた 2 本の接線と C で囲まれた部分の面積を求めよ．

2　座標平面上に点 $\mathrm{A}(\cos\theta,\sin\theta)\ (0<\theta<\pi)$ がある．原点を O とし，x 軸に関して点 A と対称な点を B とする．次の問いに答えよ．

(1)　$-1<\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\leqq\dfrac{1}{2}$ となる θ の範囲を求めよ．

(2)　点 P を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

で定める．点 P から x 軸に下ろした垂線を PQ とする．θ が (1) で求めた範囲を動くとき，△POQ の面積の最大値を求めよ．

3　関数 $f(x)=\log_2(x+1)$ に対して，次の問いに答えよ．

(1)　0 以上の整数 k に対して，$f(x)=\dfrac{k}{2}(f(1)-f(0))$ を満たす x を k を用いて表せ．

(2)　(1) で求めた x を x_k とおく．$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(x_k-x_{k-1})$ を n を用いて表せ．

4　座標平面上で，原点 O を中心とする半径 1 の円を C とし，2 点 $\mathrm{P}(0,1)$, $\mathrm{Q}(s,0)$ を考える．2 点 P, Q を通る直線を ℓ とし，ℓ と C の交点のうち P ではないものを R とする．次の問いに答えよ．

(1)　点 R の座標を s を用いて表せ．

(2)　x 座標と y 座標がともに有理数である点を有理点という．s が有理数のとき，R は有理点であることを示せ．

5　座標平面上の点で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という．n を 3 以上の自然数とし，連立不等式

$$x\geqq 0,\quad y\geqq 0,\quad x+y\leqq n$$

の表す領域を D とする．格子点 $\mathrm{A}(a,b)$ に対して，領域 D 内の格子点 $\mathrm{B}(c,d)$ が $|a-c|+|b-d|=1$ を満たすとき，点 B を点 A の隣接点という．次の問いに答えよ．

(1)　点 $\mathrm{O}(0,0)$ の隣接点をすべて求めよ．また，領域 D 内の格子点 P が直線 $x+y=n$ 上にあるとき，P の隣接点の個数を求めよ．

(2)　領域 D 内の格子点のうち隣接点の個数が 4 であるものの個数を求めよ．

（3） 領域 D から格子点を 1 つ選ぶとき，隣接点の個数の期待値が 3 以上となるような n の範囲を求めよ．ただし，格子点の選ばれ方は同様に確からしいものとする．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1** 標準　C 行列・1 次変換
- **2** やや難　A 確率・B 数列
- **3** 標準　II 図形と方程式
- **4** 標準　B ベクトル（平面）・III 微分法の応用
- **5** やや難　III 微分法の応用・積分法の応用

♣ 文系学部

- **1** 標準　II 微分積分
- **2** 標準　II 三角関数・B ベクトル（平面）
- **3** 標準　II 対数関数・B 数列
- **4** 標準　II 図形と方程式
- **5** やや難　A 確率・B 数列

略解

◇ 理系学部

1

(1)　O$(0,\,0)$

(2)　証明は省略．等号成立条件は，Q が ℓ 上にあるとき．

(3)　最大となるとき，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$，最小となるとき，$\theta=-\dfrac{\pi}{4}$

2

(1)　$\dfrac{1}{2}(n-2)(n-1)$

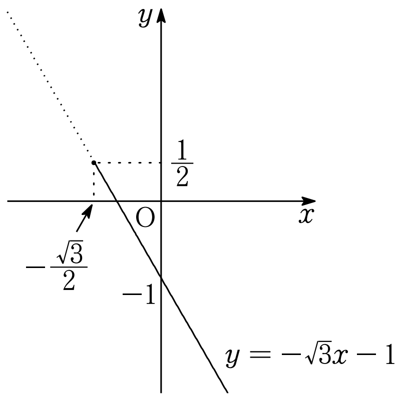
(2)　$n \geqq 6$

(3)　$\dfrac{8}{(n+2)(n+3)}$

3

(1)　$\left(\dfrac{t+\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}t+1}{2}\right)$，$\left(\dfrac{t-\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{-\sqrt{3}t+1}{2}\right)$

(2)　$y=-\sqrt{3}x-1 \quad \left(x \geqq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$



(3)　$k<-\sqrt{3}$，$-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leqq k$

4

(1)　$S=\dfrac{t+1}{2}\sin\theta$

(2)　$S=\dfrac{(t+1)\sqrt{t^2-1}}{t^2}$

(3)　$t=2$

5

(1)　証明は省略．$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^3e^{-3x}=0$

(2)　$0<k<e^{-3}$

(3)　$-\dfrac{1}{16}(\log 2)^2+\dfrac{1}{32}\log 2+\dfrac{7}{576}$

◇ 文系学部

1 (1) $a > 2$

(2) $a = \dfrac{5}{2}$, $y = 4x - 10$, $y = 16x - 40$

(3) $\dfrac{9}{2}$

2 (1) $\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2} < \theta \leqq \dfrac{5}{6}\pi$

(2) $\dfrac{15}{16}$

3 (1) $x = 2^{\frac{k}{2}} - 1$

(2) $S_n = (n - \sqrt{2} - 1) \cdot 2^{\frac{n}{2}} + \sqrt{2} + 1$

4 (1) $\mathrm{R}\left(\dfrac{2s}{s^2+1},\ \dfrac{s^2-1}{s^2+1}\right)$

(2) 証明は省略

5 (1) O の隣接点は，$(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$

P が $(n,\ 0)$，$(0,\ n)$ のときは，隣接点は 1 つ．

P が $(m,\ n-m)$ $(1 \leqq m \leqq n-1)$ のときは，隣接点は 2 つ．

(2) $\dfrac{1}{2}(n-2)(n-1)$

(3) $n \geqq 6$