◀2010 年　広島大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換 f によって，点 $\mathrm{P_1}(1,\ 0)$ が点 $\mathrm{P_2}(0,\ 3)$ に移され，点 $\mathrm{P_2}$ が点 $\mathrm{P_3}$ に，点 $\mathrm{P_3}$ が点 $\mathrm{P_1}(1,\ 0)$ にそれぞれ移されるとする．次の問いに答えよ．ただし，$a,\ b,\ c,\ d$ は実数である．

(1)　行列 A を求めよ．

(2)　自然数 n に対して A^n を求めよ．

(3)　$\mathrm{O}(0,\ 0)$ とする．点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ が f によって点 Q に移されるとする．$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ のとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のとり得る値の範囲を求めよ．

2　$p,\ a$ を実数の定数とする．多項式 $P(x) = x^3 - (2p+a)x^2 + (2ap+1)x - a$ を $x-3$ で割った余りが $10-6p$ であり，3 次方程式 $P(x) = 0$ の実数解は a のみとする．次の問いに答えよ．

(1)　実数の範囲で $P(x)$ を因数分解せよ．

(2)　a の値を求めよ．

(3)　関数 $y = P(x)$ が極値をもたないときの p の値を求めよ．

3　$t > 1$ を満たす実数 t に対して，$S(t) = \displaystyle\int_0^1 |xe^x - tx|\,dx$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1)　$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で，方程式 $xe^x = tx$ を満たす x をすべて求めよ．

(2)　$S(t)$ を求めよ．

(3)　$S(t)$ を最小にする t の値を求めよ．

4　n は 2 以上の自然数とする．袋の中に 1 から n までの数字が 1 つずつ書かれた n 個の玉が入っている．この袋から無作為に玉を 1 個取り出し，それに書かれている数を自分の得点としたのち，取り出した玉を袋に戻す．この試行を A, B, C の 3 人が順に行い，3 人の中で最大の得点の人を勝者とする．たとえば，A, B, C の得点がそれぞれ 4, 2, 4 のときは A と C の 2 人が勝者であり，3 人とも同じ得点のときは A, B, C の 3 人とも勝者である．勝者が k 人（$k = 1,\ 2,\ 3$）である確率を $P_n(k)$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1)　勝者が 3 人である確率 $P_n(3)$ を n を用いて表せ．

(2)　$n = 3$ の場合に勝者が 2 人である確率 $P_3(2)$ を求めよ．

(3)　勝者が 1 人である確率 $P_n(1)$ を n を用いて表せ．

(4)　$P_n(1) \geqq 0.9$ となる最小の n を求めよ．

5　4 で割ると余りが 1 である自然数全体の集合を A とする．すなわち，

$$A = \{4k+1 \mid k \text{ は 0 以上の整数}\}$$

とする．次の問いに答えよ．

(1)　x および y が A に属するならば，その積 xy も A に属することを証明せよ．

(2)　0 以上の偶数 m に対して，3^m は A に属することを証明せよ．

(3)　$m,\ n$ を 0 以上の整数とする．$m+n$ が偶数ならば 3^m7^n は A に属し，$m+n$ が奇数ならば 3^m7^n は A に属さないことを証明せよ．

(4)　$m,\ n$ を 0 以上の整数とする．$3^{2m+1}7^{2n+1}$ の正の約数のうち A に属する数全体の和を m と n を用いて表せ．

♠ 文系学部

1 k は定数で，$k>0$ とする．曲線 $C: y=kx^2\ (x \geqq 0)$ と 2 つの直線 $\ell: y=kx+\dfrac{1}{k}$，$m: y=-kx+\dfrac{1}{k}$ との交点の x 座標をそれぞれ $\alpha, \beta\ (0<\beta<\alpha)$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\alpha-\beta$ の値を求めよ．

(2)　$\alpha\beta$, $\alpha^2+\beta^2$ および $\alpha^3-\beta^3$ を k を用いて表せ．

(3)　曲線 C と 2 直線 ℓ, m とで囲まれた部分の面積を最小にする k の値を求めよ．また，そのときの面積を求めよ．

2 座標平面上に点 O$(0, 0)$ と点 P$(4, 3)$ をとる．不等式 $(x-5)^2+(y-10)^2 \leqq 16$ の表す領域を D とする．次の問いに答えよ．

(1)　k は定数とする．直線 $y=-\dfrac{4}{3}x+k$ 上の点を Q とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を k を用いて表せ．

(2)　点 R が D 全体を動くとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の最大値および最小値を求めよ．

3 理系学部 **2** と同じ．

4 n は 2 以上の自然数とする．袋の中に 1 から n までの数字が 1 つずつ書かれた n 個の玉が入っている．この袋から無作為に玉を 1 個取り出し，それに書かれている数を自分の得点としたのち，取り出した玉を袋に戻す．この試行を A, B, C の 3 人が順に行い，3 人の中で最大の得点の人を勝者とする．たとえば，A, B, C の得点がそれぞれ 4, 2, 4 のときは A と C の 2 人が勝者であり，3 人とも同じ得点のときは A, B, C の 3 人とも勝者である．勝者が k 人 $(k=1, 2, 3)$ である確率を $P_n(k)$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1)　勝者が 3 人である確率 $P_n(3)$ を n を用いて表せ．

(2)　$n=3$ の場合に勝者が 2 人である確率 $P_3(2)$ を求めよ．

(3)　勝者が 1 人である確率 $P_n(1)$ を n を用いて表せ．

5 次の問いに答えよ．

(1)　x, y が 4 で割ると 1 余る自然数ならば，積 xy も 4 で割ると 1 余ることを証明せよ．

(2)　0 以上の偶数 n に対して，3^n を 4 で割ると 1 余ることを証明せよ．

(3)　1 以上の奇数 n に対して，3^n を 4 で割った余りが 1 でないことを証明せよ．

(4)　m を 0 以上の整数とする．3^{2m} の正の約数のうち 4 で割ると 1 余る数全体の和を m を用いて表せ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1. 標準　C 行列・１次変換
2. 標準　II 高次方程式・微分積分
3. 標準　III 積分法の応用
4. 標準　A 確率
5. やや難　I 集合と論理・B 数列

♣ 文系学部

1. 標準　II 図形と方程式・微分積分
2. 標準　II 図形と方程式・B ベクトル（平面）
3. 標準　II 複素数と方程式・微分積分
4. 標準　A 確率
5. 標準　B 数列

略解

◇ 理系学部

1 (1) $A=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

(2) k を自然数として,

$n=3k$ のとき　$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$n=3k-2$ のとき　$A=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$n=3k-1$ のとき　$A=\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $-\dfrac{\sqrt{73}}{6}-\dfrac{1}{2} \leqq \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \leqq \dfrac{\sqrt{73}}{6}-\dfrac{1}{2}$

2 (1) $P(x)=(x-a)(x^2-2px+1)$

(2) $a=2$

(3) $p=\dfrac{1}{2}$

3 (1)

$t>e$ のとき　$x=0$

$1<t\leqq e$ のとき　$x=0,\ \log t$

(2)

$$S(t)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}t-1 & (t>e) \\ t(\log t)^2-2t\log t+\dfrac{3}{2}t-1 & (1<t\leqq e) \end{cases}$$

(3) $t=e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

4 (1) $P_n(3)=\dfrac{1}{n^2}$

(2) $P_3(2)=\dfrac{1}{3}$

(3) $P_n(1)=\dfrac{(n-1)(2n-1)}{2n^2}$

(4) $n=15$

5 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

(4) $\dfrac{11}{192}(3^{2m+2}-1)(7^{2n+2}-1)$

◇ 文系学部

1 （1） $\alpha-\beta=1$

（2） $\alpha\beta=\dfrac{1}{k^2}$，　$\alpha^2+\beta^2=1+\dfrac{2}{k^2}$，　$\alpha^3-\beta^3=1+\dfrac{3}{k^2}$

（3） $k=\sqrt{6}$ のとき，面積の最小値は $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

2 （1） $3k$

（2） 最大値：70 $\left(\mathrm{R}\left(\dfrac{41}{5},\ \dfrac{62}{5}\right)\right)$，　最小値：30 $\left(\mathrm{R}\left(\dfrac{9}{5},\ \dfrac{38}{5}\right)\right)$

3 　理系学部 **2** 同じ．

4 （1） $P_n(3)=\dfrac{1}{n^2}$

（2） $P_3(2)=\dfrac{1}{3}$

（3） $P_n(1)=\dfrac{(n-1)(2n-1)}{2n^2}$

5 （1） 証明は省略

（2） 証明は省略

（3） 証明は省略

（4） $\dfrac{9^{m+1}-1}{8}$