◀2007 年　広島大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　a, b, c, d は $a+c=b+d=1$ を満たす正の定数とし，行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える．さらに，$x_1+y_1=1$ を満たす実数 x_1, y_1 に対し，x_n, y_n $(n=2, 3, 4, \cdots)$ を漸化式

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

によって帰納的に定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$x_n+y_n=1$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ であることを示せ．

(2)　x_n をまず a, b, x_{n-1} で表し，次に a, b, x_1 で表せ．

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ．

2　座標空間の 2 点 $\mathrm{A}(2, 0, 0)$, $\mathrm{B}(0, -1, 0)$ および

$$\vec{u}=(-1, 2, 5),\quad \vec{v}=(1, 1, 1),\quad \vec{w}=(-1, 3, 1)$$

と成分表示される 3 つのベクトルがある．次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\vec{u}$ が平行かつ $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ と $\vec{v}$ が平行となるような点 P の座標を求めよ．

(2)　上で求めた点 P に対し，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ と $\vec{w}$ が直交するような点 $\mathrm{C}(0, 0, c)$ を求めよ．

(3)　上で求めた点 P と C に対し，P は 3 点 A, B, C の定める平面上にあることを示せ．

3　$f(x)=\dfrac{8x+21}{3x+8}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1)　$f(\sqrt{7})=\sqrt{7}$ であることを示せ．

(2)　$x \geqq 0$ ならば $f(x) \geqq 2$ であることを示せ．

(3)　$x \geqq 2$, $y \geqq 2$ ならば

$$|f(x)-f(y)| \leqq \frac{|x-y|}{100}$$

となることを示せ．

(4)　$x \geqq 2$ ならば

$$|f(f(x))-\sqrt{7}| \leqq \frac{|x-\sqrt{7}|}{10000}$$

となることを示し，これを用いて $|r-\sqrt{7}|<10^{-4}$ を満たす有理数 r を 1 つ求めよ．

4　$0<b<a$ を満たす定数 a, b に対し，2 つの楕円

$$A:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad B:\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

を考える．また α, β は

$$\sin\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

を満たす 0 と $\dfrac{\pi}{2}$ の間の実数とする．次の問いに答えよ．

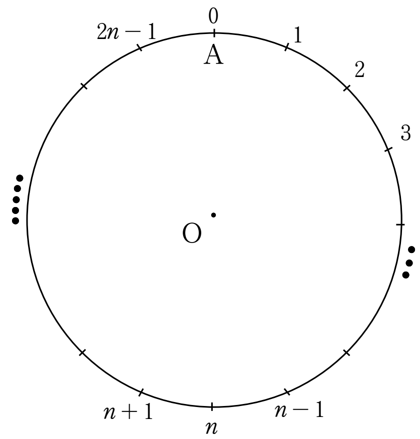
(1)　$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ を示せ．

(2)　2 つの楕円 A, B の第 1 象限にある交点の座標を求めよ．

(3)　楕円 A で囲まれる図形と楕円 B で囲まれる図形の共通部分のうち，$x \geqq 0$, $y \geqq 0$ の範囲にある部分の面

積 S を $a,\ b,\ \beta$ を用いて表せ.

5　n を 2 以上の整数とする．中心を O とする円の周を $2n$ 等分して，図のように 0 から $2n-1$ までの目盛りを付ける．目盛りが 0 の点を A とする．一方，袋の中に 1 から $2n-1$ までの整数を書いた玉がそれぞれ 1 個ずつ入っている．この袋から玉を 2 つ取り出して，玉に書かれた数と同じ目盛りを持つ 2 点をとる．2 点のうち，目盛りの大きい方を B，目盛りの小さい方を C として，$\triangle$ABC を考える．次の問いに答えよ.



(1)　辺 BC 上に点 O がある場合は何通りあるか.

(2)　$\triangle$ABC の辺上に点 O がある確率を求めよ.

(3)　$\triangle$ABC の内部に点 O がある確率は $\dfrac{n-2}{2(2n-1)}$ であることを示せ.

(4)　$\triangle$ABC の辺上に点 O があるとき $X=1$，$\triangle$ABC の内部に点 O があるとき $X=2$，それ以外のとき $X=0$ とする．X の期待値を求めよ.

♠ 文系学部

1　α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とし，x の関数 $f(x)=\sqrt{2}x^3-3(\sin\alpha)x^2+\sin\alpha\cos 2\alpha$ を考える．次の問いに答えよ.

(1)　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および方程式 $f'(x)=0$ の解を求めよ.

(2)　方程式 $f(x)=0$ が相異なる 3 つの実数解をもつような α の値の範囲を求めよ.

2　図のように，1 を左下のマス目におき，1 の右に 2 を，2 の上に 3 を，3 の左に 4 をおく．次に 2 の右に 5 をおき，5 の上に 6, 7 を，7 の左に 8, 9 をおく．このように，すでに埋められたマス目のまわりを右下から左上まで自然数を順に並べていく．左から j 番目，下から k 番目のマス目にある自然数を $a(j,\ k)$ と書く.
例えば $a(3,\ 4)=14,\ a(3,\ 5)=23$ である.

16	15	14	13	
9	8	7	12	
4	3	6	11	
1	2	5	10	

(1)　$a(1,\ k),\ a(j,\ 1)$ をそれぞれ $k,\ j$ の式で表せ.

(2)　$a(j,\ k)$ を $j \geqq k$ と $j<k$ の場合に分けて求めよ.

(3)　$a(j,\ k)=2007$ となる $j,\ k$ を求めよ.

(4)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a(k,\ k)$ を求めよ.

3　座標空間の 2 点 A$(2,\ 0,\ 0)$, B$(0,\ -1,\ 0)$ および $\vec{u}=(-1,\ 2,\ 5)$, $\vec{v}=(1,\ 1,\ 1)$, $\vec{w}=(-1,\ 3,\ 1)$ と成分表示される 3 つのベクトルがある．次の問いに答えよ.

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\vec{u}$ が平行かつ $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ と $\vec{v}$ が平行となるような点 P の座標を求めよ.

(2)　上で求めた点 P に対し，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ と $\vec{w}$ が直交するような点 C$(0,\ 0,\ c)$ を求めよ.

(3)　上で求めた点 P と C に対し，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ は 2 つの実数 $a,\ b$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=a\overrightarrow{\mathrm{CA}}+b\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ と表せることを示せ.

4　p を正の定数とし，放物線 $C: y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}$ 上の点 P$(p,\ q)$ における C の接線を ℓ とする.

(1)　点 Q$(p,\ 0)$ を通り，ℓ に直交する直線 m の方程式を求めよ.

(2)　放物線 C と直線 m の 2 つの交点の x 座標を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすれば，$\alpha<0<\beta<p$ であることを示せ.

（3） 放物線 C と直線 m で囲まれた図形のうち $x \geqq 0$ の範囲にある部分の面積を S_1，放物線 C と直線 m および直線 $x = p$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする．このとき，$S_2 - S_1 = \dfrac{1}{6}p^3$ であることを示せ．

5 袋の中に，1 と書いた玉が 2 個，2 と書いた玉が m 個，3 と書いた玉が $(8-m)$ 個，合計 10 個入っている．ただし，$2 \leqq m \leqq 7$ とする．この袋から玉を 2 個取り出し，それらの玉に書かれた数の和を S とする．次の問いに答えよ．

（1） $S = 4$ となる確率を求めよ．

（2） S を 3 で割った余りが 2 である確率を求めよ．

（3） S を 3 で割った余りの期待値 E を求めよ．

（4） E の値を最大にする m の値とそのときの E の値を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1** 標準 $\boxed{\text{III}}$ 数列の極限
- **2** 標準 $\boxed{\text{B}}$ ベクトル（空間）
- **3** やや難 $\boxed{\text{II}}$ 不等式の証明
- **4** 標準 $\boxed{\text{C}}$ いろいろな曲線
- **5** やや難 $\boxed{\text{A}}$ 確率

♣ 文系学部

- **1** 標準 $\boxed{\text{II}}$ 三角関数・微分積分
- **2** 標準 $\boxed{\text{B}}$ 数列
- **3** 標準 $\boxed{\text{B}}$ ベクトル（空間）
- **4** 標準 $\boxed{\text{II}}$ 微分積分
- **5** 標準 $\boxed{\text{A}}$ 確率

略解

◇ 理系学部

1 (1) 証明は省略

(2) $x_n = (a-b)x_{n-1} + b$,　$x_n = \dfrac{b}{1-a+b} + (a-b)^{n-1}\left(x_1 - \dfrac{b}{1-a+b}\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{b}{1-a+b}$

2 (1) $\mathrm{P}\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)$

(2) $\mathrm{C}(0,\ 0,\ 2)$

(3) 証明は省略

3 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

(4) 証明は省略. $r = \dfrac{590}{223}$

4 (1) 証明は省略

(2) $\left(\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

(3) $S = ab\beta$

5 (1) $n-1$（通り）

(2) $\dfrac{3}{2n-1}$

(3) 証明は省略

(4) $\dfrac{n+1}{2n-1}$

◇ 文系学部

1 (1) $f'(x) = 3\sqrt{2}x\left(x - \sqrt{2}\sin\alpha\right)$,　$x = 0,\ \sqrt{2}\sin\alpha$

(2) $\dfrac{\pi}{6} < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$

2 (1) $a(1,\ k) = k^2$,　$a(j,\ 1) = j^2 - 2j + 2$

(2) $a(j,\ k) = \begin{cases} (j-1)^2 + k & (j \geqq k) \\ k^2 - (j-1) & (j < k) \end{cases}$

(3) $j = 19$,　$k = 45$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a(k,\ k) = \frac{1}{3}n(n^2+2)$

3 (1) $\mathrm{P}\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)$

(2) $\mathrm{C}(0,\ 0,\ 2)$

(3) 証明は省略

4 (1) $m : y = -\dfrac{1}{p}(x - p)$

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

5 (1) $\dfrac{m^2 - 5m + 32}{90}$

(2) $\dfrac{-m^2 + 8m + 1}{45}$

(3) $\dfrac{-m^2 + 9m + 12}{30}$

(4) $m = 4,\ 5$,　$E = \dfrac{16}{15}$