◀2006 年　広島大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　3×3 行列 A と E を

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　$A^2,\ A^3$ を求めよ．

(2)　$(xA-E)^3=xA-E$ を満たす実数 x のうち，正のものをすべて求めよ．

(3)　(2) で求めた x のうち最小のものを x_0 とする．自然数 n に対して，$(x_0A-E)^n=p_nA+q_nE$ を満たす実数 p_n と q_n を求めよ．

2　$a_1=2,\ a_2=1$ と $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

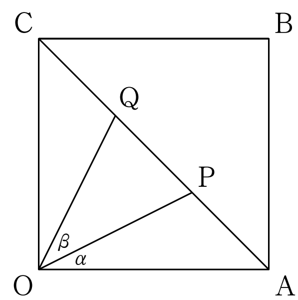
(1)　$b_n=a_{n+1}+a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とするとき，数列 $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列であることを示せ．

(2)　$n\geqq 2$ のとき，$\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}b_k$ を n の式で表せ．

(3)　a_n を n の式で表せ．

(4)　数列 $\left\{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right\}$ の収束，発散を調べ，収束する場合はその極限値を求めよ．

3　正方形 OABC の対角線 AC を 3 等分し，図のように，A に近い点を P，C に近い点を Q とする．また，$\angle\mathrm{AOP}=\alpha,\ \angle\mathrm{POQ}=\beta$ とする．次の問いに答えよ．



(1)　$\cos\alpha,\ \cos\beta$ の値を求めよ．

(2)　$\alpha<\dfrac{\pi}{6}<\beta$ を示せ．

(3)　線分 PQ 上に点 R を $\angle\mathrm{POR}=\alpha$ となるようにとる．このとき，比 AR : RC を求めよ．

4　赤い袋に 1 から n までの整数を書いた玉が，それぞれ 1 個ずつ，合計 n 個入っている．同様に，白い袋に 1 から n までの整数を書いた玉が，それぞれ 1 個ずつ，合計 n 個入っている．ただし，$n>4$ とする．赤い袋から玉を 2 個同時に取り出し，書いてある数を $r_1,\ r_2$ とする．次に，白い袋から玉を 2 個同時に取り出し，書いてある数を $w_1,\ w_2$ とする．

座標平面上の 4 本の直線 $x=r_1,\ x=r_2,\ y=w_1,\ y=w_2$ で囲まれた四角形を A とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　A の面積が 4 である確率を求めよ．

(2)　$|r_1-r_2|$ の期待値を求めよ．

(3)　$n=7$ のとき，A の面積の期待値を求めよ．

5　関数 $f(x)=x+\dfrac{x}{x^2-1}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$f(x)$ の増減と極値を調べて，$y=f(x)$ のグラフをかけ．

(2)　$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=mx$ の交点が，3 個になるような m の値の範囲を求めよ．

(3)　$m<0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=mx$ で囲まれた二つの部分の面積の和を求めよ．

♠ 文系学部

1　次の問いに答えよ．

(1)　$\sqrt{7}$ の小数部分を p とするとき，$\dfrac{3}{p}-p$ は整数であることを示し，その整数を求めよ．

(2)　$k>0$ を定数とするとき，x についての方程式 $\log_3 x=kx$ が二つの実数解 a と $3a$ をもつとする．このとき，k の値と a の値を求めよ．

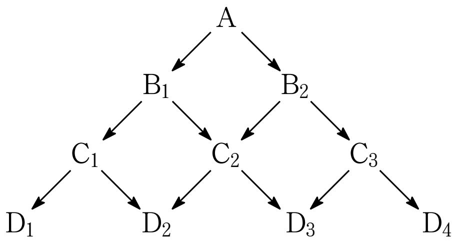
2　$a_1=1$ と $a_{n+1}=3a_n-n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　p と q を定数とする．数列 $\{b_n\}$ を $b_n=a_n+pn+q$ によって定めると，$\{b_n\}$ は公比 3 の等比数列になるとする．このとき，定数 p と q の値を求めよ．

(2)　a_n を n の式で表せ．

(3)　数列 $\{a_n\}$ の和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を n の式で表せ．

3　図の一番上の点 A から玉を落とす．玉はそれぞれの分岐点において，確率 p で左下に，確率 $1-p$ で右下に向かうものとする．また，この図の B_1, B_2 の段を 1 段目，C_1, C_2, C_3 の段を 2 段目として段数を数えるものとする．$0<p<1$ として，次の問いに答えよ．

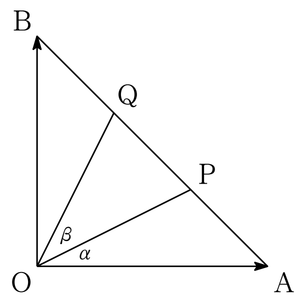


(1)　2 段目の点 C_1, C_2, C_3 に対して，玉がその点に落ちてくる確率を求めよ．

(2)　2 段目の点のうち，点 C_2 に玉が落ちてくる確率が，他の点 C_1, C_3 の各点に落ちてくる確率のいずれよりも大きくなるとする．このとき，p の値の範囲を求めよ．

(3)　3 段目の点のうち，点 D_3 に玉が落ちてくる確率が，他の点 D_1, D_2, D_4 の各点に落ちてくる確率のいずれよりも大きくなるとする．このとき，p の値の範囲を求めよ．

4　平面上で，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は直交し，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=1$ を満たすとする．線分 AB を 3 等分し，図のように，A に近い点を P, B に近い点を Q とする．また，$\angle\mathrm{AOP}=\alpha$, $\angle\mathrm{POQ}=\beta$ とする．次の問いに答えよ．



(1)　$\cos\alpha, \cos\beta$ の値を求めよ．

(2)　$\alpha<30^\circ<\beta$ を示せ．

(3)　線分 PQ 上に，点 R を $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となるようにとる．このとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right|^2$ を k の式で表せ．

(4)　(3) の R に対して，$\angle\mathrm{POR}=\alpha$ となるとき，k の値を求めよ．

5　直線 $y=-2x+m$ が，放物線 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+ax\ (a>2)$ に点 $\mathrm{P}(p, q)$ で接している．連立不等式

$$\begin{cases} 0\leqq y\leqq -\dfrac{1}{2}x^2+ax \\ x\leqq p \end{cases}$$

の表す領域の面積を S_1 とする．また，連立不等式

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^2 + ax \leqq y \leqq -2x + m \\ 0 \leqq x \leqq p \end{cases}$$

の表す領域の面積を S_2 とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$a,\ m,\ q$ を p の式で表せ．

(2)　S_1 と S_2 を p の式で表せ．

(3)　$a > 2$ のとき，$\dfrac{1}{2} < \dfrac{S_2}{S_1} < 2$ が成り立つことを示せ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　標準　$\boxed{\text{C}}$ 行列

2　標準　$\boxed{\text{III}}$ 数列の極限

3　標準　$\boxed{\text{II}}$ 三角関数

4　標準　$\boxed{\text{A}}$ 確率

5　標準　$\boxed{\text{III}}$ 微分法の応用・積分法の応用

♣ 文系学部

1　基本　$\boxed{\text{I}}$ 実数・$\boxed{\text{II}}$ 指数・対数

2　標準　$\boxed{\text{B}}$ 数列

3　標準　$\boxed{\text{A}}$ 確率

4　標準　$\boxed{\text{B}}$ ベクトル（平面）

5　標準　$\boxed{\text{II}}$ 微分積分

略解

◇ 理系学部

1 (1) $A^2=\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix}9&9&9\\9&9&9\\9&9&9\end{pmatrix}$

(2) $x=\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}$

(3) $p_n=\begin{cases}\dfrac{1}{3} & (n\text{ が奇数})\\ -\dfrac{1}{3} & (n\text{ が偶数})\end{cases}$, $q_n=\begin{cases}-1 & (n\text{ が奇数})\\ 1 & (n\text{ が偶数})\end{cases}$

2 (1) 証明は省略

(2) $1-(-2)^{n-1}$

(3) $a_n=2^{n-1}+(-1)^{n-1}$

(4) 収束, $\dfrac{1}{2}$

3 (1) $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta=\dfrac{4}{5}$

(2) 証明は省略

(3) AR：RC $=4:3$

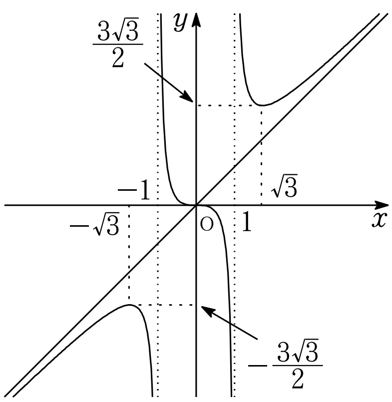
4 (1) $\dfrac{4(3n^2-14n+12)}{n^2(n-1)^2}$

(2) $\dfrac{n+1}{3}$

(3) $\dfrac{64}{9}$

5 (1) 極大値：$-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ $(x=-\sqrt{3})$, 極小値：$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ $(x=\sqrt{3})$

グラフは右図.



(2) $m<0,\ 1<m$

(3) $-m-\log(1-m)$

◇ 文系学部

1 （1）　4

（2）　$k=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$，　$a=\sqrt{3}$

2 （1）　$p=-\dfrac{1}{2}$，　$q=-\dfrac{1}{4}$

（2）　$a_n=\dfrac{3^{n-1}+2n+1}{4}$

（3）　$\dfrac{3^n+2n^2+4n-1}{8}$

3 （1）　$\mathrm{C}_1:p^2$，　$\mathrm{C}_2:2p(1-p)$，　$\mathrm{C}_3:(1-p)^2$

（2）　$\dfrac{1}{3}<p<\dfrac{2}{3}$

（3）　$\dfrac{1}{4}<p<\dfrac{1}{2}$

4 （1）　$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，　$\cos\beta=\dfrac{4}{5}$

（2）　証明は省略

（3）　$2k^2-2k+1\ \left(\dfrac{1}{3}\leqq k\leqq\dfrac{2}{3}\right)$

（4）　$k=\dfrac{3}{7}$

5 （1）　$a=p-2$，　$q=\dfrac{1}{2}p^2-2p$，　$m=\dfrac{1}{2}p^2$

（2）　$S_1=\dfrac{1}{3}p^3-p^2$，　$S_2=\dfrac{1}{6}p^3$

（3）　証明は省略