◀2005 年　広島大学（前期）▶

♠ 理系学部

1 行列 I と J が $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$J=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ であるとき，次の問いに答えよ．

(1) 行列 J^2, J^3, J^4 は，それぞれ，I または J の定数倍になることを示せ．

(2) 実数 a と b について，行列 $aI+bJ$ が逆行列をもつための必要十分条件を求めよ．

(3) 任意の実数 s, t に対して，行列 $sI+(1+st)J+tJ^2+st^2J^3+t^2J^4$ は逆行列をもつことを示せ．

2 正の実数 a, b, c を係数とする 3 次方程式

$$(*)\quad x^3+ax^2+bx+c=0$$

が，純虚数の解をもつとする．次の問いに答えよ．

(1) $ab-c$ の値を求めよ．

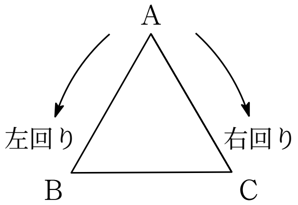
(2) 複素数平面上で方程式 $x^3+8=0$ の 3 個の解が表す点を頂点とする三角形を考える．方程式 $(*)$ の解が表すすべての点がこの三角形の頂点または辺上にあるとき，a, b, c の値を求めよ．

3 2 枚のコインを同時に投げて，三角形 ABC の 1 つの頂点にある駒を，

2 枚とも表が出たとき，左回りで隣の頂点に移し，

2 枚とも裏が出たとき，右回りで隣の頂点に移し，

表と裏が出たとき，動かさない



という試行を考える．初めに駒を頂点 A に置く．この試行を n 回繰り返したとき，1 回目の試行後の駒の位置を X_1，2 回目の試行後の駒の位置を X_2, $\cdots$, n 回目の試行後の駒の位置を X_n とする．次の問いに答えよ．

(1) この試行を 2 回繰り返したとき，X_2 が A である確率 P_2 を求めよ．

(2) この試行を 4 回繰り返したとき，最後の X_4 のみが A である確率 Q_4 を求めよ．

(3) この試行を n 回 $(n\geqq 2)$ 繰り返したとき，最後の X_n のみが A である確率 Q_n を求めよ．

(3) この試行を n 回 $(n\geqq 2)$ 繰り返したとき，X_n が A である確率 P_n を求めよ．

4 実数全体で定義された関数 $f(x)=\dfrac{4x+a}{x^2+1}$ は，$x=\dfrac{1}{2}$ で極値をもつ．ただし，a は定数である．次の問いに答えよ．

(1) a の値を求めよ．

(2) 関数 $y=f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ の値を求めよ．

5 次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)=4x^3-3x+\dfrac{1}{2}$ の増減を調べて極値を求めよ．

(2) 公式 $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ を用いて，$k=\cos\dfrac{2\pi}{9}$ は方程式 $f(x)=0$ の解であることを示せ．

(3) $k>\dfrac{3}{4}$ であることを示せ．

(4) 方程式 $\cos x=x$ の解を α とするとき，$\dfrac{2\pi}{9}<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ を示せ．ここで，$3.14<\pi<3.15$ を利用してもよい．

♠ 文系学部

1　次の問いに答えよ．

(1)　$P(x)$ は，x^3 の係数が 1 であるような 3 次式とする．$P(x)$ を $(x+1)^2$ で割ったときの余りは $x+1$ であり，$(x-1)^2$ で割ったときの余りは $x+c$ である．ただし，c は定数である．このとき，c の値と $P(x)$ を求めよ．

(2)　正の実数 x, y が $xy=100$ を満たすとき，$(\log_{10} x)^3+(\log_{10} y)^3$ の最小値と，そのときの x と y の値を求めよ．

2　2 つの円

$$(*)\quad x^2+y^2+(2\sqrt{2}\sin\theta)x-\frac{\sqrt{17}}{2}y+\sin^2\theta+\frac{17}{16}=0$$

$$(**)\quad x^2+y^2=\frac{9}{16}$$

について，次の問いに答えよ．ただし，$0^\circ<\theta<180^\circ$ とする．

(1)　円 $(*)$ の半径と中心の座標を θ を用いて表せ．

(2)　円 $(*)$ と円 $(**)$ が共有点をもたないような θ の値の範囲を求めよ．

3　三角形 OAB において，OA $=5$, OB $=6$, AB $=4$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおき，点 P を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$ で定める．次の問いに答えよ．

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ．

(2)　点 P から辺 OA に垂線を下ろし，OA との交点を E とする．$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=k\vec{a}$ を満たす実数 k の値を求めよ．

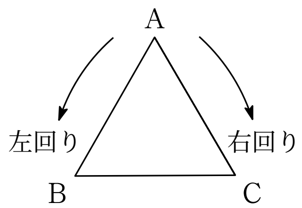
(3)　線分 PE の長さを求めよ．

4　1 枚のコインを 1 回投げて，三角形 ABC の 1 つの頂点にある駒を，

　　表が出たとき，左回りで隣の頂点に移し，

　　裏が出たとき，右回りで隣の頂点に移す

という試行を考える．初めに駒を頂点 A に置く．次の問いに答えよ．



(1)　この試行を 2 回繰り返したとき，駒が頂点 A にある確率 P_2 を求めよ．

(2)　この試行を 3 回繰り返したとき，駒が頂点 A にある確率 P_3 を求めよ．

(3)　この試行を 4 回繰り返したときに，駒が頂点 A に初めてもどってくる確率 Q_4 を求めよ．

(3)　この試行を n 回 $(n\geqq 2)$ 繰り返したときに，駒が頂点 A に初めてもどってくる確率 Q_n を求めよ．

5　各実数 t に対して，方程式 $y=(2t-3)x-t^2$ で表される直線 L_t を考える．次の問いに答えよ．

(1)　直線 L_t と L_s が直交するとき，L_t と L_s の交点の y 座標は，t と s によらない定数になることを示せ．

(2)　放物線 $y=ax^2+bx+c$ にすべての直線 L_t が接するとき，定数 a, b, c の値を求めよ．

(3)　(2) で求めた放物線と 2 つの直線 L_t, L_{t+2} によって囲まれる図形の面積は，t によらない定数になることを示せ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1** |標準| $\boxed{\text{C}}$ 行列
- **2** |標準| $\boxed{\text{B}}$ 複素数と複素数平面
- **3** |標準| $\boxed{\text{I}}$ 確率・$\boxed{\text{B}}$ 数列
- **4** |標準| $\boxed{\text{III}}$ 微分法の応用・積分法
- **5** |標準| $\boxed{\text{II}}$ 三角関数・微分積分

♣ 文系学部

- **1** |基本| $\boxed{\text{A}}$ 整式・$\boxed{\text{I}}$ 2 次関数・$\boxed{\text{II}}$ 対数関数
- **2** |標準| $\boxed{\text{II}}$ 図形と方程式
- **3** |標準| $\boxed{\text{B}}$ ベクトル（平面）
- **4** |標準| $\boxed{\text{I}}$ 確率・$\boxed{\text{B}}$ 数列
- **5** |標準| $\boxed{\text{II}}$ 微分積分

略解

◇ 理系学部

1 (1) 証明は省略

(2) $a^2+b^2 \fallingdotseq 0$ ($a \fallingdotseq 0$ または $b \fallingdotseq 0$ でも可)

(3) 証明は省略

2 (1) $ab-c=0$

(2) $a=2,\quad b=\dfrac{4}{3},\quad c=\dfrac{8}{3}$

3 (1) $P_2=\dfrac{3}{8}$

(2) $Q_4=\dfrac{9}{128}$

(3) $Q_n=\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-2}$

(4) $P_n=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{3}$

4 (1) $a=3$

(2) 最大値：$4\ \left(x=\dfrac{1}{2}\right)$，　最小値：$-1\ (x=-2)$

(3) $2\log 2+\dfrac{3}{4}\pi$

5 (1) 極大値：$\dfrac{3}{2}\ \left(x=-\dfrac{1}{2}\right)$，極小値：$-\dfrac{1}{2}\ \left(x=\dfrac{1}{2}\right)$

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

(4) 証明は省略

◇ 文系学部

1 (1) $c=-3,\quad P(x)=x^3-2x-1$

(2) 最小値：$2\ (x=y=10)$

2 (1) 半径：$\sin\theta$，　中心：$\left(-\sqrt{2}\sin\theta,\ \dfrac{\sqrt{17}}{4}\right)$

(2) $0^\circ<\theta<30^\circ,\ 150^\circ<\theta<180^\circ$

3 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{45}{2}$

(2) $k=\dfrac{7}{10}$

(3) $\mathrm{PE}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

4 (1) $P_2=\dfrac{1}{2}$

(2) $P_3=\dfrac{1}{4}$

(3) $Q_4=\dfrac{1}{8}$

(4) $Q_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

5 (1) 証明は省略

(2) $a=1,\quad b=-3,\quad c=0$

(3) 証明は省略