◀2001 年　広島大学（前期）▶

♠ 理系学部

1 z は $0^\circ < \arg z < 90^\circ$ を満たす複素数とし，複素数平面上の 3 点 O(0), A(1), B(z) を頂点とする △OAB を考える．また，$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ とおく．

(1)　$\alpha^2 - \alpha + 1$ の値を求めよ．

(2)　点 P(w) を，直線 OB に関して点 A と反対側に，△POB が正三角形になるようにとる．複素数 w を z と α を用いて表せ．

(3)　点 Q($z + \alpha - \alpha z$) に対し，△ABQ は正三角形であることを示せ．

(4)　$\arg\left(\dfrac{z+\alpha-\alpha z}{w-1}\right)$ を求めよ．ただし，偏角の範囲は，0° 以上 360° 未満とする．

2 $a>0$ とし，極方程式 $r = 2a\sin\theta\ \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$ で表される曲線を C とする．

(1)　曲線 C は円の一部であることを示し，その円の中心と半径を求めよ．さらに，曲線 C を図示せよ．

(2)　曲線 C と x 軸および直線 $x = a$ で囲まれた図形を，x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

3 数列 $\{a_n\}$ は，関係式

$$a_1 = 2,\quad (a_{n+1} - a_n)^2 = 2(a_{n+1} + a_n),\quad a_{n+1} > a_n\quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定まっている．

(1)　a_2, a_3, a_4 を計算せよ．

(2)　一般項 a_n を n の式で表せ．

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}\right)$ を求めよ．

4 次のそれぞれの問いに答えよ．

(1)　行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ が $AB = O$ を満たすとき，行列 A の 4 つの成分の積 $abcd$ は正または 0 であることを示せ．

(2)　行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が逆行列を持たず，3 つの成分が正であるとき，残りの 1 つの成分も正であることを示せ．

(3)　A, B を 2×2 行列とする．$AB = O$ かつ $B \neq O$ ならば，A の逆行列 A^{-1} は存在しないことを示せ．

5 関数 $f(x)$ が任意の実数 x に対して

$$f(x) = x^2 - \int_0^x (x-t)f'(t)\,dt$$

を満たすとき，次の問いに答えよ．

(1)　$f(0)$ の値を求め，さらに $f'(x) = 2x - f(x)$ が成り立つことを示せ．

(2)　$(e^x f(x))' = 2xe^x$ を示せ．

(3)　$f(x)$ を求めよ．

6　A, B, C の 3 人が優勝決定戦を行う．まず 3 人のうち 2 人が対戦し，その勝者が残りの 1 人と対戦する．これをくり返して，2 回続けて勝ったものを優勝者とする．A と B が対戦したときにそれぞれが勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$ とし，C が A または B と対戦したときに C が勝つ確率は $p\ (0<p<1)$，負ける確率は $1-p$ であるとする．

第 1 回戦は A と B の対戦として，次の問いに答えよ．

(1)　第 2 回戦では第 1 回戦の勝者が残りの C と対戦する．C が負ければ勝者は優勝者となるが，C が勝てば C は第 1 回戦の敗者と第 3 回戦を行う．第 3 回戦で優勝者が決まる場合の各対戦の勝者を順に並べると，ACC と BCC の 2 通りの順列が得られる．第 4 回戦で優勝者が決まる場合の各対戦の勝者の順列を答えよ．

(2)　第 m 回戦で優勝者が決まる確率を F_m とする．F_2, F_3, F_4 をそれぞれ求めよ．

(3)　2 以上の自然数 n に対して，確率 F_{3n} を求めよ．

(4)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} F_{3n}$ を計算せよ．

♠ 文系学部

1　次の問いに答えよ．

(1)　次の不等式を満たす x の範囲を求めよ．

$$\log_3(x-7)+\log_3(x-5)\leqq 1$$

(2)　次の不等式を満たす y の範囲を求めよ．

$$9^y-8\times 3^y-9\leqq 0$$

(3)　x, y がそれぞれ (1), (2) の範囲を動くとき，$\log_2 x+2^y$ の最大値を求めよ．

2　放物線 $y=x^2$ と直線 l が 2 点で交わっている．それらの交点の x 座標を s, $t\ (s<t)$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　放物線 $y=x^2$ と直線 l で囲まれた部分の面積 S は，$S=\dfrac{1}{6}(t-s)^3$ で与えられることを証明せよ．

(2)　直線 l が，点 $(t,\ t^2)$ における $y=x^2$ の接線と直交しているとき，s を t で表せ．

(3)　(2) のとき，(1) の面積 S の最小値，および最小値を与える t を求めよ．

3　$y=a(\sin\theta+\cos\theta)+\sin 2\theta$ とする．ただし，a は正の定数である．

(1)　$t=\sin\theta+\cos\theta$ とおいて，y を t の式で表せ．

(2)　$t=\sin\theta+\cos\theta$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(3)　y の最大値 M と最小値 m を，それぞれ a を用いて表せ．

4　三角形 OAB において，辺 AB, BO をそれぞれ 1：2 に内分する点を M, N とする．また，線分 OM と AN の交点を P とする．

(1)　$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくとき，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AN}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ をそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ．

(2)　OM と AN が直交し，$\left|\vec{a}\right|=1$, $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{3}$ のとき，$\angle\mathrm{AOB}$ を求めよ．

(3)　(2) のとき，さらに $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ を求めよ．

5　さいころを投げて出た目の数が k で割り切れるという事象を A_k, 2 個のさいころを同時に投げて出た 2 つの目の数の積が k で割り切れるという事象を B_k, 3 個のさいころを同時に投げて出た 3 つの目の数の積が k で割り切れるという事象を C_k とする．

(1)　事象 $\mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4$ の確率 $P(\mathrm{A}_2), P(\mathrm{A}_3), P(\mathrm{A}_4)$ を，それぞれ求めよ.

(2)　事象 $\mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3, \mathrm{B}_4$ の確率 $P(\mathrm{B}_2), P(\mathrm{B}_3), P(\mathrm{B}_4)$ を，それぞれ求めよ.

(3)　事象 $\mathrm{C}_2, \mathrm{C}_3$ の確率 $P(\mathrm{C}_2), P(\mathrm{C}_3)$ を，それぞれ求めよ.

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1 |基本| B 複素数と複素数平面

2 |標準| III 積分法の応用・ C 極方程式

3 |標準| III 数列の極限

4 |標準| C 行列

5 |標準| III 微分法・積分法

6 |基本| I 確率・ III 数列の極限

♣ 文系学部

1 |基本| II 指数関数・対数関数

2 |基本| II 微分積分

3 |標準| II 三角関数

4 |基本| B ベクトル（平面）

5 |基本| I 確率

略解

◇ 理系学部

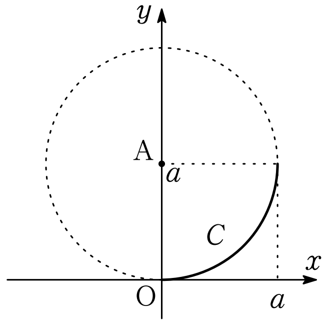
1 (1) $\alpha^2-\alpha+1=0$

(2) $w=\alpha z$

(3) 証明は省略

(4) $\arg\left(\dfrac{z+\alpha-\alpha z}{w-1}\right)=240^\circ$

2 (1) 証明は省略，中心 $\mathrm{A}(0,\ a)$，半径 a．曲線 C の概形は右図の太実線.



(2) $\left(\dfrac{5}{3}-\dfrac{\pi}{2}\right)\pi a^3$

3 (1) $a_2=6,\ a_3=12,\ a_4=20$

(2) $a_n=n(n+1)$

(3) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}\right)=1$

4 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

5 (1) $f(0)=0$，証明は省略

(2) 証明は省略

(3) $f(x)=2(x-1)+2e^{-x}$

6 (1) ACBB, BCAA

(2) $F_2=1-p,\quad F_3=p^2,\quad F_4=\dfrac{1}{2}p(1-p)$

(3) $F_{3n}=p^2\left\{\dfrac{1}{2}p(1-p)\right\}^{n-1}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}F_{3n}=\dfrac{2p^2}{2-p+p^2}$

◇ 文系学部

1 (1) $7 < x \leqq 8$

(2) $y \leqq 2$

(3) $7\ (x = 8,\ y = 2)$

2 (1) 証明は省略

(2) $s = -\dfrac{1}{2t} - t$

(3) $\dfrac{4}{3}\ \left(t = \dfrac{1}{2}\right)$

3 (1) $y = t^2 + at - 1$

(2) $-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$

(3)

$$M = \begin{cases} 1 + \sqrt{2}a & (a \geqq 0) \\ 1 - \sqrt{2}a & (a \leqq 0) \end{cases}, \quad m = \begin{cases} 1 - \sqrt{2}a & (a \geqq 2\sqrt{2}) \\ -\dfrac{a^2 + 4}{4} & (-2\sqrt{2} \leqq a \leqq 2\sqrt{2}) \\ 1 + \sqrt{2}a & (a \leqq -2\sqrt{2}) \end{cases}$$

4 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{2}{3}\vec{a} + \dfrac{1}{3}\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{AN}} = -\vec{a} + \dfrac{2}{3}\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{4}{7}\vec{a} + \dfrac{2}{7}\vec{b}$

(2) $\angle\mathrm{AOB} = 90^\circ$

(3) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$

5 (1) $P(\mathrm{A}_2) = \dfrac{1}{2},\quad P(\mathrm{A}_3) = \dfrac{1}{3},\quad P(\mathrm{A}_4) = \dfrac{1}{6}$

(2) $P(\mathrm{B}_2) = \dfrac{3}{4},\quad P(\mathrm{B}_3) = \dfrac{5}{9},\quad P(\mathrm{B}_4) = \dfrac{5}{12}$

(3) $P(\mathrm{C}_2) = \dfrac{7}{8},\quad P(\mathrm{C}_3) = \dfrac{19}{27}$