◀1999 年　広島大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする．

(1)　$X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，$AX=XA$ が成り立つとき，a, b, c, d の満たす関係式を求めよ．

(2)　2 次の正方行列 B, C が $AB=BA=C$, $BC=CB=A$ を満たすとき，B, C を求めよ．

2　$0<a<1$ とする．点 $(1, 0)$ から楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$ に引いた接線の接点の x 座標を b とする．

(1)　b を a で表せ．

(2)　楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$ の $b \leqq x \leqq a$ の部分と直線 $x=b$ で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を a で表せ．

(3)　V の値が最大となる a の値と，そのときの V の最大値を求めよ．

3　$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$ を満たす二等辺三角形 OAB において，頂点 A, B からそれぞれの対辺またはその延長上に引いた 2 つの垂線の交点を G，辺 AB の中点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\angle \mathrm{AOB}=\theta$ とおく．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ を満たす s, t を θ を用いて表せ．

(2)　点 G が三角形 OAB の外部または周上にあるときの θ の値の範囲を求めよ．

(3)　$\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ のとき，$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{GH}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|}$ の値の範囲を求めよ．

4　k を定数とする．曲線 $y=x^3-kx$ 上の点 $\mathrm{P}(a, a^3-ka)$ における接線 l が，曲線上の P と異なる点 $\mathrm{Q}(b, b^3-kb)$ を通るものとする．

(1)　b を a で表せ．

(2)　Q における曲線 $y=x^3-kx$ の接線が l と直交するとき，k, a の満たす関係式を求めよ．

(3)　(2) で求めた関係式を満たす a が存在するような k の値の範囲を求めよ．

5　n が自然数のとき，次の不等式を証明せよ．ただし，$a>0$ とする．

(1)　$(a+1)^n \geqq a^n+na^{n-1}$

(2)　$(n+1)^n \geqq 2n^n$

(3)　$n! \leqq 2\left(\dfrac{n}{2}\right)^n$

6　1 から n までの自然数を 1 つずつ書いた n 枚のカードがある．よくまぜて 1 枚引いては戻すということを 2 回行い，1 回目に引いたカードに書かれている数と 2 回目に引いたカードに書かれている数の差の絶対値を得点とする試行を考える．

(1)　この試行を 1 回行うときの得点の期待値を n の式で表せ．

(2)　$n=3$ とする．この試行を 3 回行うとき，得点の合計が 2 である確率を求めよ．

♠ 文系学部

1　2 点 $(1,\ 1)$, $(-1,\ 5)$ を通る 2 次関数のグラフについて，頂点を $(p,\ q)$, y 軸との交点を $(0,\ k)$ とする．

(1)　$p,\ q$ を k で表せ．

(2)　$p,\ q$ が共に正のとき，k の値の範囲を求めよ．

2　a を正の定数とし，$f(x)=\log_2(a+x)+\log_4(a-x)$ とする．

(1)　$f(x)$ が最大となる x の値を求めよ．

(2)　$f(x)$ の最大値が 4 以上のとき，a の値の範囲を求めよ．

3　正六角形 ABCDEF の頂点 A, B, C の座標をそれぞれ $(2,\ 3)$, $(1,\ 2)$, $(a,\ b)$ とする．ただし，$a>0$ とする．

(1)　$a,\ b$ の値を求めよ．

(2)　対角線 AD, CF の交点の座標を求めよ．

4　三角形 ABC において，$\mathrm{AB}=2$, $\mathrm{AC}=1$ とする．$\angle \mathrm{A}$ の二等分線が辺 BC と交わる点を P とし，$\angle \mathrm{PAC}=\theta$ とする．

(1)　三角形 ABC の面積を θ を用いて表せ．

(2)　AP を θ を用いて表せ．

(3)　$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ のとき，θ の値を求めよ．

5　大小 2 個のさいころを同時に投げる試行において，出た目の数の和が 3 の倍数のときには A が 3 点，B が 0 点を得るとし，3 の倍数でないときには A が 0 点，B が 1 点を得るとする．

(1)　この試行を 1 回行うとき，A の得点の期待値と B の得点の期待値を求めよ．

(2)　この試行を n 回行うとき，A の合計得点と B の合計得点が等しくなる確率を，1 から 10 までの自然数 n のそれぞれについて求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1. 標準　C　行列
2. 標準　III　積分法の応用
3. 標準　B　ベクトル（平面）
4. 標準　II　微分積分
5. 標準　A　数列
6. 標準　I　確率

♣ 文系学部

1. 標準　I　２次関数
2. 標準　II　指数関数・対数関数
3. 標準　B　ベクトル（平面）
4. 基本　I　三角比
5. 標準　I　確率

略解

◇ 理系学部

1 (1) $a=d,\ b=c$

(2) $(B,\ C)=(\pm A,\ \pm E),\ (\pm E,\ \pm A)$（複号同順）（ただし，$E$ は単位行列）

2 (1) $b=a^2$

(2) $V=\dfrac{\pi}{3}(a^4-3a^2+2a)$

(3) $\dfrac{\pi(2\sqrt{3}-3)}{4}\ \left(a=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$

3 (1) $s=t=\dfrac{\cos\theta}{1+\cos\theta}$

(2) $\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta<\pi$

(3) $7-4\sqrt{3}\leqq\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathrm{GH}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|}\leqq 3$

4 (1) $b=-2a$

(2) $36a^4-15ka^2+k^2+1=0$

(3) $k\geqq\dfrac{4}{3}$

5 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

6 (1) $\dfrac{n^2-1}{3n}$

(2) $\dfrac{22}{81}$

◇ 文系学部

1 (1) $p=\dfrac{1}{3-k},\quad q=\dfrac{-k^2+3k-1}{3-k}$

(2) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<k<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

2 (1) $x=\dfrac{a}{3}$

(2) $a\geqq 6$

3 (1) $a=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\quad b=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

(2) $\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{5-\sqrt{3}}{2}\right)$

4 (1) $\sin 2\theta$

(2) $\mathrm{AP}=\dfrac{4}{3}\cos\theta$

(3) $\theta=30^\circ$

5 (1) A の得点の期待値：1，　B の得点の期待値：$\dfrac{2}{3}$

(2)
$$\begin{cases} n=1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 10\ \text{のとき},\ 0 \\ n=4\ \text{のとき},\ \dfrac{32}{81}, \qquad n=8\ \text{のとき},\ \dfrac{1792}{6561} \end{cases}$$