◀1998 年　広島大学（前期）▶

♠ 理系学部

1 行列 $A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -x \\ x & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $(x \geqq 0)$ に対して，

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つとする．

(1)　x を求めよ．

(2)　A^3 を求めよ．

(3)　自然数 n に対して，$A^{2n}+A^n+E$ を求めよ．ただし，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．

2 空間内に 4 点 $\mathrm{P_1}\left(0,\ \frac{\sqrt{5}-1}{2},\ 1\right)$, $\mathrm{P_2}\left(0,\ -\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ 1\right)$, $\mathrm{P_3}\left(1,\ 0,\ \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, $\mathrm{P_4}\left(-1,\ 0,\ \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

を定め，線分 $\mathrm{P_1P_2}$ の中点を Q とする．

(1)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{P_2P_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QP_3}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{P_2P_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QP_4}}$ を求めよ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{QP_3}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QP_4}}$ のなす角を θ とするとき，$\sin\theta$ の値を求めよ．

(3)　四面体 $\mathrm{P_1P_2P_3P_4}$ の体積を求めよ．

3 閉区間 $\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$ 上の関数 $f(x)$ を次の式で定義する．

$$f(x)=\int_x^{x+1}\log\left(\left|t-\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{2}\right)dt$$

(1)　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ $\left(-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\right)$ を求めよ．

(2)　$f(x)$ を最小にする x の値 a と，そのときの最小値を求めよ．

(3)　(2) で求めた a に対して，$\displaystyle\int_a^{a+1} t\log\left(\left|t-\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{2}\right)dt$ を求めよ．

4 曲線 C は媒介変数 θ を用いて

$$C:\begin{cases} x=\cos^2\theta-\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta \\ y=\sin\theta\cos\theta-\sqrt{3}\sin^2\theta \end{cases}\quad \left(0\leqq\theta\leqq\frac{5}{12}\pi\right)$$

と表されている．

(1)　曲線 C が

$$C:\begin{cases} x=a+b\cos(2\theta+A) \\ y=c+d\sin(2\theta+A) \end{cases}\quad \left(0\leqq\theta\leqq\frac{5}{12}\pi\right)$$

と表されるような $a,\ b,\ c,\ d,\ A$ $(0\leqq A<\pi)$ を求めよ．

(2)　曲線 C の長さを求めよ．

5 自然数 n に対して，関数 $f_n(x)=p_ne^{nx}+q_ne^{-nx}$ が $f_n(0)=1,\ f_n'(1)=-n$ を満たすとする．

(1)　p_n と q_n を求め，$f_n'(x)<0$ を示せ．

(2)　方程式 $f_n(x)=0$ の解 z_n を求めよ．

(3)　数列 $\{z_n\}$ に対して，$\lim_{n\to\infty} z_n$ を求めよ．

6　A と B の 2 人がジャンケンをする．A がグー，チョキ，パーを出す確率をそれぞれ x, y, z とし，B がグー，チョキ，パーを出す確率をそれぞれ p, q, r とする．1 回のジャンケンの結果，A は次の表のような点を得る．

A の得点表

	B がグー	B がチョキ	B がパー
A がグー	0	3	-6
A がチョキ	-3	0	5
A がパー	6	-5	0

このときの A の得点の期待値を E で表す．

(1)　$p=q=r=\dfrac{1}{3}$ のとき，E を最大にする x, y, z と，そのときの最大値を求めよ．

(2)「B が確率 p, q, r をどのようにとっても $E=0$」となるには，A は確率 x, y, z をどのようにとればよいか．

♠ 文系学部

✎注：**1**〜**4** は共通問題．**5**, **6** から 1 題を選択して解答．

1　三角形 ABC において，3 つの角の大きさの比が $A:B:C=7:4:1$，辺 AB の長さが 1 とする．

(1)　$\sin A, \sin C$ の値を求めよ．

(2)　辺 BC の長さを求めよ．

2　2 次関数 $f(x)=px^2+qx+r$ は，次の (i), (ii) を満たすとする．

(i)　$y=f(x)$ のグラフ上の点 $(x, f(x))$ における接線の傾きは $-4x+8$ である．

(ii)　$y=f(x)$ のグラフは x 軸と異なる 2 点で交わる．

(1)　p, q の値と r の範囲を求めよ．

(2)　$y=f(x)$ のグラフが x 軸と交わる 2 点を A, B, y 軸と交わる点を C とし，三角形 ABC の面積を T とする．また，$y=f(x)$ のグラフと x 軸とで囲まれる図形の面積を S とする．$S=4T$ となるような r の値を求めよ．

3　xy 平面の点 O$(0, 0)$, A$(1, 1)$, B$(2, -1)$ と実数 k に対して，点 C は $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を満たすとする．

(1)　内積 $\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が $2k$ となる点 P の描く図形は，C を通り，直線 OA と直交する直線であることを示せ．

(2)　$\angle\mathrm{ACB}$ の大きさが 45° となる k を求めよ．

4　xy 平面上に原点 O$(0, 0)$ を中心とする半径 1 の円 C とその上の点 A$(1, 0)$ がある．円 C 上を動く点 P に対して，3 点 O, A, P が三角形をつくるとき，その三角形の重心を G とする．

(1)　G の軌跡を求めよ．

(2)　円 C 上の点 $\mathrm{P}_0\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ に対する三角形 OAP_0 の重心を G_0 とする．(1) で求めた軌跡の G_0 における接線が x 軸と交わる点の座標を求めよ．

5　A と B の 2 人が同時に 1 個ずつサイコロを振り，出た目を比較して，大きい目を出した方の得点は 1，他方の得点は 0，となる試行を考える．ただし，2 つのサイコロの出た目が同じなら，A, B のいずれの得点も 0 とする．

(1)　この試行を 1 回行うとき，A の得点が 1 となる確率を p, B の得点が 1 となる確率を q，いずれの得点も 0 となる確率を r とする．p, q, r を求めよ．

(2)　この試行を 2 回行うとき，A の合計得点が B の合計得点より多くなる確率を求めよ．

(3)　この試行を 3 回行うとき，A の合計得点が B の合計得点より 1 点多くなる確率を求めよ．

6　行列 $A=\begin{pmatrix} p & q \\ a & b \end{pmatrix}$ $(p>0,\ q>0)$ で与えられる一次変換 f によって xy 平面上の直線 $y=x+1$ が直線 $y=2x$ にうつされるとする．

(1)　a, b を p, q を用いて表せ．

(2)　直線 $y=2x-1$ は f によってどのような図形にうつされるか．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　標準　C 行列

2　標準　B ベクトル

3　標準　III 微分法・積分法

4　標準　II 三角関数・C いろいろな曲線

5　標準　III 関数の極限・微分法の応用

6　標準　I 確率

♣ 文系学部

1　基本　II 三角関数

2　標準　II 微分積分

3　標準　B ベクトル

4　標準　II 図形と方程式

5　標準　I 確率

6　基本　C 1次変換

Ⓒ 大学受験・数学塾　管理人：makoto

略解

◇ 理系学部

1 (1) $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $A^3 = E$

(3) k を自然数とするとき,

$$A^{2n} + A^n + E = \begin{cases} O & (n = 3k-1 \text{ または } n = 3k-2) \\ 3E & (n = 3k) \end{cases}$$

2 (1) $\overrightarrow{\mathrm{P_2P_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QP_3}} = \overrightarrow{\mathrm{P_2P_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QP_4}} = 0$

(2) $\sin\theta = \dfrac{2}{3}$

(3) $\dfrac{2(\sqrt{5}-2)}{3}$

3 (1) $f'(x) = \log(1+x) - \log(1-x)$

(2) 最小値 ： $\log 2 - 1$ $(x = a = 0)$

(3) $\dfrac{\log 2 - 1}{2}$

4 (1) $a = \dfrac{1}{2},\ b = 1,\ c = -\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ d = 1,\ A = \dfrac{\pi}{3}$

(2) $\dfrac{5}{6}\pi$

5 (1) $p_n = \dfrac{e^{-n}-1}{e^n + e^{-n}},\ q_n = \dfrac{e^n + 1}{e^n + e^{-n}}$, 証明は省略

(2) $z_n = \dfrac{1}{2n} \log \dfrac{1+e^n}{1-e^{-n}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n = \frac{1}{2}$

6 (1) 最大値 ： $\dfrac{2}{3}$ $(x,\ y,\ z) = (0,\ 1,\ 0)$

(2) $x = \dfrac{5}{14},\ y = \dfrac{3}{7},\ z = \dfrac{3}{14}$

Ⓒ 大学受験 ・ 数学塾　管理人 ： makoto

◇ 文系学部

1 (1) $\sin A = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin C = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(2) $\mathrm{BC} = 2+\sqrt{3}$

2 (1) $p=-2,\ q=8,\ r>-8$

(2) $r=-2,\ 4$

3 (1) 証明は省略

(2) $k=-1,\ 2$

4 (1) 点 $\left(\dfrac{1}{3},\ 0\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{3}$ の円周の 2 点 $(0,\ 0)$, $\left(\dfrac{2}{3},\ 0\right)$ を除く部分.

(2) $\left(\dfrac{3+2\sqrt{3}}{9},\ 0\right)$

5 (1) $p=\dfrac{5}{12},\ q=\dfrac{5}{12},\ r=\dfrac{1}{6}$

(2) $\dfrac{5}{16}$

(3) $\dfrac{145}{576}$

6 (1) $a=2p,\ b=2q$

(2) 直線 ： $y=2x$

Ⓒ 大学受験・数学塾　管理人 ： makoto