◀1997 年　広島大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　赤玉と白玉が入っている箱と，表の出る確率が $p\ (0<p<1)$ である硬貨が 1 枚ある．この硬貨を投げて，表が出れば箱の中から赤玉を 1 個取り出し，裏が出れば箱の中から白玉を 1 個取り出す，という試行を行う．ただし，一度箱から取り出した玉は，もとに戻さない．いま，赤玉 3 個と白玉 3 個が入っている箱に対してこの試行を繰り返し，箱の中から赤玉を全部取り出すかまたは白玉を全部取り出したとき，試行を終了するものとする．試行がちょうど n 回で終了する確率を p_n とし，$s=p(1-p)$ とする．

(1)　p_3 および p_4 を s を用いて表せ．

(2)　終了するまでに行われる試行の回数の期待値を s を用いて表せ．

(3)　(2) で求めた期待値の最大値とそれを与える p の値を求めよ．

2　原点 O を中心とする半径 1 の円に内接する正五角形 $\mathrm{A_1A_2A_3A_4A_5}$ に対し，$\angle \mathrm{A_1OA_2}=\theta$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}=\vec{a}_1$, $\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}=\vec{a}_2$, $\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}=\vec{a}_3$, $\overrightarrow{\mathrm{OA_4}}=\vec{a}_4$, $\overrightarrow{\mathrm{OA_5}}=\vec{a}_5$ とする．

(1)　$\vec{a}_3$ を $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, θ を用いて表せ．

(2)　$\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3+\vec{a}_4+\vec{a}_5=\vec{0}$ を示せ．

(3)　$1+2\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2+2\vec{a}_1\cdot\vec{a}_3=0$ を示し，$\cos\theta$ の値を求めよ．（ただし，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ は $\vec{a}$, $\vec{b}$ の内積を表す．）

3　実数 a, b, c, x と行列 $A=\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が，関係式 $(A-E)\begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}=(a-1)\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$ をみたしているとする．ただし，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．

(1)　x を a, b, c を用いて表せ．

(2)　自然数 $n=1, 2, 3, \cdots\cdots$ に対し，行列 A の n 個の積 A^n は $\begin{pmatrix} a^n & x_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の形になる．x_n を a, b, c, n を用いて表せ．

(3)　$E+A+A^2+\cdots\cdots+A^{n-1}=\begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & s_n \end{pmatrix}$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$ とおく．$|a|<1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n$ および $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{n}$ を求めよ．

4　曲線 $y=e^x$, x 軸，y 軸および直線 $x=1$ で囲まれた領域が，直線 $x=a$ で面積の等しい 2 つの部分に分かれている．ただし，e は自然対数の底である．

(1)　定数 a を求めよ．

(2)　関数 $f(x)=\displaystyle\int_0^1 |x-t|e^t\,dt$ は $0\leqq x\leqq 1$ の範囲において，(1) で求めた a で最小値をとることを示し，その最小値を求めよ．

(3)　(2) の結果を利用して，不等式 $e^{\frac{2}{e+1}}<\dfrac{e+1}{2}<e^{\frac{e}{e+1}}$ を示せ．

5　正の実数 x に対して，$f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left|\cos\left(\frac{2k+1}{2n}x\right)-\cos\left(\frac{2k-1}{2n}x\right)\right|$ とおく．

(1)　$f(x)=\displaystyle\int_0^x |\sin t|\,dt$ を示せ．

(2)　実数 $x \geqq \pi$ に対し，$m\pi \leqq x < (m+1)\pi$ となる自然数 m をとるとき，$2m \leqq f(x) < 2m+2$ であることを示せ．

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ を求めよ．

6　xy 平面上に 3 点 A$(0,\ 8)$, B$(-3,\ 2)$, C$(3,\ 2)$ を頂点とする二等辺三角形がある．辺 AC 上の点 P に対して，辺 AB 上に AP＝BQ となる点 Q をとる．

(1)　点 P の x 座標を a として，直線 PB および直線 QC の方程式を求めよ．

(2)　線分 PB と線分 QC の交点を R とする．点 P が辺 AC 上を A から C まで動くとき，点 R の軌跡を表す方程式を a を用いないで表せ．

♠ 文系学部

注：**1**～**4** は共通問題．**5**, **6** から 1 題を選択して解答．

1　3 辺の長さが OA＝2, AB＝3, BO＝4 である △OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{4\vec{a}+2\vec{b}}{9}$ となる点 P をとる．

(1)　直線 OP が辺 AB と交わる点を C とするとき，AC : CB を求めよ．

(2)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ．

(3)　点 H を辺 OA 上の点とし，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=t\vec{a}$ とする．$f(t)=\left|\overrightarrow{\mathrm{PH}}\right|^2$ を t を用いて表し，点 H が辺 OA 上を O から A まで動くときの $f(t)$ の最小値を求めよ．

2　次の連立不等式の表す領域を D とする．

$$\begin{cases} \log_3(12+4x-x^2)-\log_3 y \leqq 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(6-x)-\log_2(x+1)+\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{y+5}\right) \leqq 1 \end{cases}$$

(1)　領域 D を図示せよ．

(2)　領域 D の面積を求めよ．

3　放物線 $y=x^2$ 上の 2 点 A$(a,\ a^2)$, B$(b,\ b^2)$ $(a<b)$ における接線の交点を S とする．

(1)　点 S の座標を求めよ．

(2)　2 つの線分 AS, SB および放物線 $y=x^2$ で囲まれる図形の面積は $\dfrac{1}{12}(b-a)^3$ であることを示せ．

(3)　$y=x^2$ 上の点 C$(c,\ c^2)$ $(a<c<b)$ における接線が，線分 AS と交わる点を P，線分 SB と交わる点を Q とする．c が $a<c<b$ である範囲を動くとき，3 つの線分 AP, PQ, QB と放物線 $y=x^2$ で囲まれる図形の面積の最小値を求めよ．

4　xy 平面上に 3 点 A$\left(0,\ \dfrac{4}{\sqrt{3}}\right)$, B$\left(-1,\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, C$\left(1,\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ を頂点とする正三角形がある．辺 AC 上の点 P に対して，辺 AB 上に AP＝BQ となる点 Q をとる．

(1)　点 P の x 座標を a として，直線 PB および直線 QC の方程式を求めよ．

(2)　線分 PB と線分 QC の交点 R の座標を求めよ．

(3)　原点を O とするとき，OR^2 の値を求めよ．

5　A が持っている袋の中には赤玉 3 個と白玉 4 個が入っており，B が持っている袋の中には赤玉 5 個と白玉 6 個が入っている．A と B の各々が同時に各自の袋の中から無作為に 2 個ずつ玉を取り出し，玉の色を確かめてから，取り出した玉をそれぞれ元の袋に戻す，という試行を繰り返す．同時に取り出された合計 4 個の玉の色がすべて同じであれば，その時点で試行を終了する．ただし，試行は 6 回以上行わないものとする．

（1）1 回目の試行で，A の取り出す玉が 2 個とも赤玉となる確率を求めよ．

（2）試行が 1 回で終了する確率を求めよ．

（3）試行がちょうど 2 回で終了する確率を求めよ．

（4）試行が 3 回以上続く確率を求めよ．

6　行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ において，a, b, c, d は正の実数で $a+b=c+d=1$ をみたしているとする．

（1）行列 A の n 個の積 A^n について，$A^n\begin{pmatrix} 1 & b \\ 1 & -c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & br^n \\ 1 & -cr^n \end{pmatrix}$ であることを示せ．ただし，$r=1-b-c$ とする．

（2）A^n を求めよ．

（3）2 つの実数 α, β に対し $A^n\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ ならば，$\alpha=\beta$ であることを示せ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1 標準 I 確率

2 標準 B ベクトル

3 標準 C 行列

4 やや難 III 積分法の応用

5 標準 III 関数の極限・積分法

6 標準 C いろいろな曲線

♣ 文系学部

1 基本 B ベクトル

2 標準 II 図形と方程式・指数関数・対数関数

3 標準 II 微分積分

4 標準 II 図形と方程式

5 標準 I 確率

6 標準 C 行列

略解

◇ 理系学部

1 (1) $p_3 = 1 - 3s$,　$p_4 = 3s(1 - 2s)$

(2) $6s^2 + 3s + 3$

(3) $p = \dfrac{1}{2}$，期待値の最大値 ： $\dfrac{33}{8}$

2 (1) $\overrightarrow{a_3} = -\overrightarrow{a_1} + 2\cos\theta\overrightarrow{a_2}$

(2) 証明は省略

(3) $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}$

3 (1) $x = (a - 1)(c - b)$

(2) $x_n = (1 - a^n)(b - c)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{1 - a}$，　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{n} = b - c$

4 (1) $a = \log\left(\dfrac{e + 1}{2}\right)$

(2) $e - (e + 1)\log\left(\dfrac{e + 1}{2}\right)$

(3) 証明は省略

5 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{2}{\pi}$

6 (1) 直線 BP ： $y = \dfrac{6 - 2a}{a + 3}(x + 3) + 2$，　直線 QC ： $y = \dfrac{-2a}{6 - a}(x - 3) + 2$

(2) $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{16} = 1$　$(-3 \leqq x \leqq 3,\ y \geqq 2)$

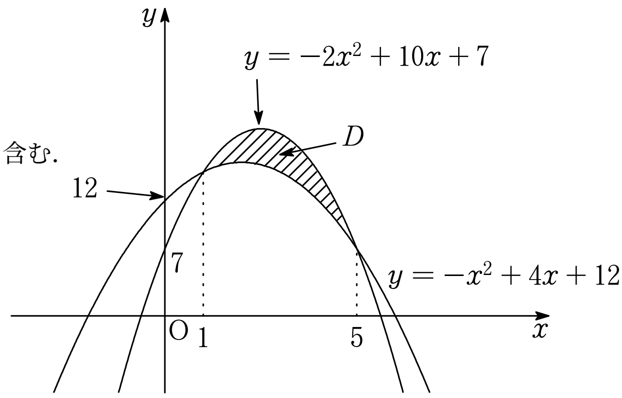
◇ 文系学部

1 (1)　AC : CB = 1 : 2

(2)　$\vec{a}\cdot\vec{b} = \dfrac{11}{2}$

(3)　$\dfrac{5}{12}$

2 (1)　領域 D は右図の斜線部分で境界線上の点を含む.



(2)　$\dfrac{32}{3}$

3 (1)　$\mathrm{S}\left(\dfrac{a+b}{2},\ ab\right)$

(2)　証明は省略

(3)　$\dfrac{1}{48}(b-a)^3$

4 (1)　直線 PB ： $y=\dfrac{\sqrt{3}(1-a)}{a+1}(x+1)+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，　直線 QC ： $y=\dfrac{-\sqrt{3}a}{2-a}(x-1)+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(2)　$\mathrm{R}\left(\dfrac{2a-1}{a^2-a+1},\ \dfrac{-2a^2+2a+1}{\sqrt{3}(a^2-a+1)}\right)$

(3)　$\dfrac{4}{3}$

5 (1)　$\dfrac{1}{7}$

(2)　$\dfrac{8}{77}$

(3)　$\dfrac{552}{5929}$

(4)　$\dfrac{4761}{5929}$

6 (1)　証明は省略

(2)　$A^n = \dfrac{1}{b+c}\begin{pmatrix} c+br^n & b-br^n \\ c-cr^n & b+cr^n \end{pmatrix}$

(3)　証明は省略