◀1996 年　広島大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　△OAB において，辺 OA を $s:(1-s)$ に内分する点を P，辺 OB を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする．また BP と AQ との交点を R, OR の延長と辺 AB との交点を S とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $0<s<1$, $0<t<1$ として，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を，$\vec{a}, \vec{b}, s, t$ で表せ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を，$\vec{a}, \vec{b}, s, t$ で表せ．

(3)　S が AB の中点になるための条件を求めよ．

2　さいころを振る実験を $2n$ 回繰り返す．このとき確率変数 X_k は k 回目の実験結果が偶数のとき $+1$, 奇数のとき -1 の値をとるものとする．いま $-x \leqq \sum_{k=1}^{2n} X_k \leqq x$ が起こる確率を p_x として，次の問いに答えよ．

(1)　p_0 の値を求めよ．

(2)　$p_{2n-3}-p_{2n-6}$ の値を求めよ．ただし，$n \geqq 3$ とする．

3　次の問いに答えよ．

(1)　すべての自然数 n に対して，$2^n>n$ であることを示せ．

(2)　数列の和 $S_n=\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$ を求めよ．

(3)　$\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

4　点 O を原点とする座標平面上を動く点 $\mathrm{P}(1+t^2,\ 2-2t)$ がある．OP が x 軸の正の向きとなす角を θ とする．t が実数全体を動くとき，θ の動く範囲を求めよ．ただし，$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする．

5　関数 $f(x)=\int_{-x}^{x} \frac{t\sin t}{1+2^t}\,dt$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(2)　$0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，$f(x)$ の最小値を求めよ．

6　球面 $x^2+y^2+z^2=1$ と平面 $\alpha: z=3x-1$ とが交わってできる円を C とする．

(1)　C の中心の座標と半径を求めよ．

(2)　点 $\mathrm{P}(0,0,k)$ を通り平面 α に垂直で y 軸に平行な平面 β が C と交わってできる 2 点を Q, R とする．△PQR が正三角形となるような k の値を求めよ．ただし，$-1<k<1$ とする．

♠ 文系学部

1　四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし，△OAB, △OBC, △OCA, △ABC の面積を，それぞれ S_1, S_2, S_3, S_4 とする．

(1)　$S_1=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$ であることを示せ．

(2)　$\vec{a}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\vec{b}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$ であることを示せ．

(3)　(2) において，さらに $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ のとき，${S_1}^2 + {S_2}^2 + {S_3}^2 - {S_4}^2$ を最大にする $\vec{a}$ と $\vec{b}$ とのなす角度を求めよ．

2　放物線 $y = mx^2$ 上に点 $\mathrm{P}(a,\ ma^2)$ がある．この放物線の点 P における接線に垂直な直線を l とする．l がこの放物線と 2 点 P, Q で交わるとして，次の問いに答えよ．ただし，$m>0$, $a \neq 0$ とする．

(1)　点 Q の x 座標を求めよ．

(2)　点 Q における接線と l とのなす角が 30° となる点 P の座標を求めよ．

3　数列 $\{a_n\}$ を次のように定める．

$$a_1 = \frac{1}{3},\quad a_{n+1} = 2a_n(1 - a_n) \qquad (n = 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

(1)　すべての自然数 n に対して，$a_n < \dfrac{1}{2}$ であることを示せ．

(2)　数列 $\{b_n\}$ を次のように定める．

$$b_n = \log_{10}(1 - 2a_n) \qquad (n = 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

このとき，b_{n+1} と b_n の関係式を求めよ．

(3)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

4　xy 平面上の曲線 C と直線 l を次のように定める．

$$C : y = x(x-3)^2,\quad l : y = mx$$

(1)　C と l が $x \geqq 0$ において異なる 3 点で交わるような m の範囲を求めよ．

(2)　(1) で，C と l で囲まれる 2 つの図形の面積が等しくなる m の値を求めよ．

(3)　(2) のとき，2 つの図形の面積の和を求めよ．

5　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換を f とする．原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ 以外の 1 点を $\mathrm{P}_1(a_1,\ b_1)$ とし，P_1 が f により移された点を $\mathrm{P}_2(a_2,\ b_2)$ とする．原点以外の点 P に対して，点 P を中心として原点 O を通る円を C_P で表すことにして，次の問いに答えよ．ただし，$t \neq 0$ とする．

(1)　f は C_{P_1} を C_{P_2} に移すことを示せ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} \perp \overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}$ であることを示せ．

(3)　C_{P_1} と C_{P_2} との交点の座標を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1 基本 代幾 ベクトル

2 標準 確統 二項分布

3 標準 微積 数列の極限

4 標準 基解 三角関数

5 標準 微積 微分法・積分法

6 標準 代幾 球面と平面の方程式

♣ 文系学部

1 標準 代幾 ベクトル

2 標準 基解 三角関数・微分積分

3 標準 基解 数列

4 標準 基解 微分積分

5 標準 代幾 ベクトル・１次変換

略解

◇ 理系学部

1 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \dfrac{s(t-1)}{st-1}\vec{a} + \dfrac{t(s-1)}{st-1}\vec{b}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \dfrac{s(t-1)}{s(t-1)+t(s-1)}\vec{a} + \dfrac{t(s-1)}{s(t-1)+t(s-1)}\vec{b}$

(3) $s = t$

2 (1) $p_0 = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}$

(2) $p_{2n-3} - p_{2n-6} = \dfrac{n(2n-1)}{2^{2n-1}}$

3 (1) 証明は省略

(2) $S_n = \dfrac{4}{3}\left\{\dfrac{4}{3}\left(1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right)-\dfrac{n}{4^n}\right\}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{16}{9}$

4 $-\dfrac{\pi}{8} \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{8}\pi$

5 (1) $f'(x) = x\sin x$

(2) -2π

6 (1) $\mathrm{C}\left(\dfrac{3}{10},\ 0,\ -\dfrac{1}{10}\right)$, $r = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

(2) $k = \dfrac{13}{14}$

◇ 文系学部

1 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) $\dfrac{\pi}{3}$

2 (1) $x = -a - \dfrac{1}{2m^2 a}$

(2) $\mathrm{P}\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}m},\ \dfrac{1}{3m}\right)$

3 (1) 証明は省略

(2) $b_{n+1} = 2b_n$

(3) $a_n = \dfrac{1}{2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2n-1}\right\}$

4 (1) $0<m<9$

(2) $m = 1$

(3) 8

5 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) $(0,\ 0),\ (2a_1,\ 2b_1)$