

9 ('15 京都大)

【難易度】… 標準

直線 $y = px + q$ が、 $y = x^2 - x$ のグラフとは交わるが、 $y = |x| + |x - 1| + 1$ のグラフとは交わらないような (p, q) の範囲を図示し、その面積を求めよ。

【テーマ】: 交点をもつ条件・もたない条件

方針

$y = px + q$ と $y = x^2 - x$ のグラフが共有点をもつ場合は、判別式で処理できます。 $y = px + q$ と $y = |x| + |x - 1| + 1$ のグラフが共有点をもたない場合は、後者のグラフをかいて考えます。

解答

$y = px + q$ と $y = x^2 - x$ のグラフが共有点をもつとき、

$$px + q = x^2 - x \iff x^2 - (p+1)x - q = 0$$

の判別式を D とすると、 $D \geq 0$ であればよいので、

$$D = (p+1)^2 + 4q \geq 0 \iff q \geq -\frac{1}{4}(p+1)^2 \dots\dots \textcircled{1}$$

次に、 $y = px + q$ と $y = |x| + |x - 1| + 1$ のグラフが共有点をもたないときを考える。

まず、 $y = |x| + |x - 1| + 1$ について、

(i) $x < 0$ のとき、

$$y = -x - (x - 1) + 1 = -2x + 2$$

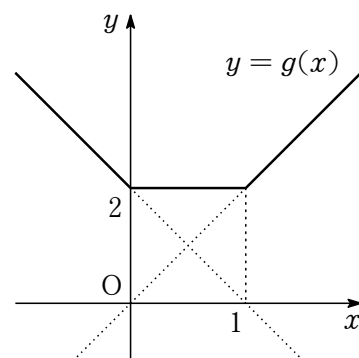
(ii) $0 \leq x < 1$ のとき、

$$y = x - (x - 1) + 1 = 2$$

(iii) $x \geq 1$ のとき、

$$y = x + (x - 1) + 1 = 2x$$

であるから、 $y = |x| + |x - 1| + 1$ のグラフは右図のようになる。



$f(x) = px + q$, $g(x) = |x| + |x - 1| + 1$ とおくと、 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフが共有点をもたないための必要条件は、

$$f(0) < g(0) \text{ かつ } f(1) < g(1)$$

より、

$$q < 2 \text{ かつ } p + q < 2$$

である。また、 $p > 2$ または $p < -2$ に対しては、十分大きな x または十分小さな x に対して、 $f(x) > g(x)$ となる x が存在するため不適。したがって、

$$-2 \leq p \leq 2$$

である。

以上より、 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフが共有点をもたないための必要十分条件は、

$$q < 2 \text{ かつ } p + q < 2 \text{ かつ } -2 \leq p \leq 2 \dots\dots \textcircled{2}$$

である。

ゆえに、求める条件は、① かつ ② であるから、

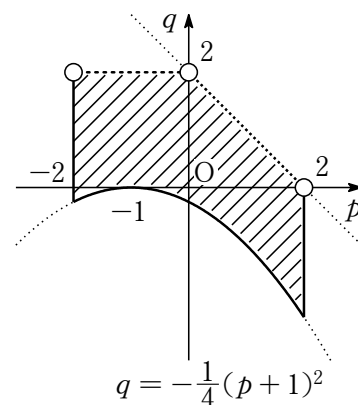
右図斜線部分である。境界線上の点は、

$$q = 2 \quad (-2 \leq p \leq 0), \quad p + q = 2$$

は含まず、他は含む。

また、その面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= (2+4) \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + \int_{-2}^2 \left\{ -\left(-\frac{1}{4}(p+1)^2\right) \right\} dp \\ &= 6 + \frac{1}{4} \int_{-2}^2 (p+1)^2 dp \\ &= 6 + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{3}(p+1)^3 \right]_{-2}^2 \\ &= 6 + \frac{1}{12} \{3^3 - (-1)^3\} \\ &= 6 + \frac{7}{3} = \frac{25}{3} \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$



解説

$y = px + q$ と $y = |x| + |x-1| + 1$ のグラフが共有点をもたないときは、判別式のような道具がないので、グラフを考えます。 $y = |x| + |x-1| + 1$ のグラフは折れ線になるので、直線 $y = px + q$ が共有点をもたないためには、最低でも $x = 0, x = 1$ のときに $q(2) = 1$ よりも小さいことが必要になります。これが必要条件です。また、 $x < 0, 2 < x$ の部分の傾きが 2 なので、 $y = px + q$ の傾きが 2 より大きかったり -2 より小さかったりすると x の値を十分大きくとったり、十分小さくとったりすると、必ず $y = px + q$ と $y = |x| + |x-1| + 1$ のグラフは共有点をもつこととなります。したがって、 $-2 \leq p \leq 2$ という条件を付け加える必要があります。これが充分性の確認です。

面積の計算は、 $q \geq 0$ と $q \leq 0$ に分けて考えています。 $q \geq 0$ の部分は、台形なのでその面積は、

$$(2+4) \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 6$$

となります。また、 $q \leq 0$ の部分は、放物線と x 軸で囲まれた部分の面積なので、

$$\int_{-2}^2 \left\{ -\left(-\frac{1}{4}(p+1)^2\right) \right\} dp$$

となります。面積計算は上手に領域を分割することで楽に計算できる場合があるので、色々な問題を通して経験を積んでおきましょう。