8 （'15　静岡大） 【難易度】… 標準

i を虚数単位，r を 1 より大きい実数とし，$w = r\left(\cos\dfrac{\pi}{24} + i\sin\dfrac{\pi}{24}\right)$ とおく．また，数列 $\{z_n\}$ を次の式で定める．

$$z_1 = w,\quad z_{n+1} = z_n w^{n+2}\quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

このとき，次の問いに答えよ．

（1） z_2 を r を用いて表せ．

（2） z_n の偏角の 1 つを n を用いて表せ．

（3） 複素数平面で原点を O，z_n で表される点を P_n とする．$7 \leqq n \leqq 48$ のとき，$\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{OP}_{n+1}$ が $\angle \mathrm{O} = \dfrac{\pi}{3}$ を満たす直角三角形となるような n と r をそれぞれ求めよ．また，そのときの z_n の偏角 θ を $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で求めよ．

【テーマ】：複素数の図形への応用

方針

(1) は，漸化式より z_2 を求め，ド・モアブルの定理を用います．(2) は，漸化式を解くことで，z_n を求めればよい．(3) は，指定された直角三角形を作るために図をかいて考えます．

♣ ♠

解答

（1） 与えられた漸化式より，

$$\begin{aligned}
z_2 &= z_1 w^3 = w^4\\
&= r^4\left(\cos\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24}\right)^4 = r^4\left(\cos\frac{4\pi}{24} + i\sin\frac{4\pi}{24}\right)\\
&= r^4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = r^4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\\
&= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}+i}{2}r^4}\cdots\cdots(\textbf{答})
\end{aligned}$$

（2） 与えられた漸化式より，

$$\begin{aligned}
z_n &= z_{n-1}w^{n+1} = z_{n-2}w^n \cdot w^{n+1}\\
&= z_{n-3}w^{n-1} \cdot w^n \cdot w^{n+1}\\
&= \cdots\cdots\\
&= z_1 \cdot w^3 \cdots\cdots w^{n-1} \cdot w^n \cdot w^{n+1} = w \cdot w^3 \cdots\cdots w^{n-1} \cdot w^n \cdot w^{n+1}\\
&= w^{1+3+\cdots\cdots+(n-1)+n+(n+1)} = w^{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-2}\\
&= w^{\frac{n^2+3n-2}{2}}\\
&= r^{\frac{n^2+3n-2}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24}\right)^{\frac{n^2+3n-2}{2}}\\
&= r^{\frac{n^2+3n-2}{2}}\left(\cos\frac{n^2+3n-2}{48}\pi + i\sin\frac{n^2+3n-2}{48}\pi\right)
\end{aligned}$$

よって，求める偏角の 1 つは，

$$\boldsymbol{\frac{n^2+3n-2}{48}\pi}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(3) $\triangle P_nOP_{n+1}$ が $\angle O = \dfrac{\pi}{3}$ の直角三角形になるとき，$r > 1$ より，

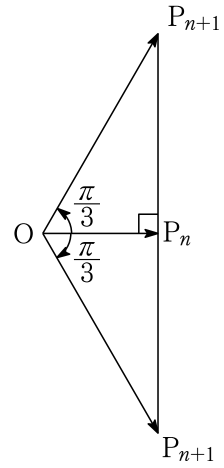
$$|z_{n+1}| = |z_n w^{n+2}| = r^{n+2}|z_n| > |z_n|$$

であるから，$OP_{n+1} = 2OP_n$ である．よって，

$$|z_{n+1}| = 2|z_n| \text{ かつ } \angle P_nOP_{n+1} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ (k \text{ は整数})$$

が成り立つ．$\angle P_nOP_{n+1} = \arg\dfrac{z_{n+1}}{z_n} = \arg w^{n+2}$ であるから，

$$\begin{aligned}\arg w^{n+2} &= \arg\left\{r^{n+2}\left(\cos\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24}\right)^{n+2}\right\}\\ &= \arg\left\{r^{n+2}\left(\cos\frac{(n+2)\pi}{24} + i\sin\frac{(n+2)\pi}{24}\right)\right\}\end{aligned}$$



であることから，

$$\arg w^{n+2} = \frac{(n+2)\pi}{24}$$

である．すなわち，

$$\frac{(n+2)\pi}{24} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ (k \text{ は整数}) \cdots\cdots ①$$

である．ここで，$7 \leqq n \leqq 48$ より，

$$\frac{9}{24}\pi \leqq \frac{n+2}{24}\pi \leqq \frac{50}{24}\pi \iff \frac{3}{8}\pi \leqq \frac{n+2}{24}\pi \leqq \frac{25}{12}\pi$$

であるから，① が成り立つとき，$0 \leqq \dfrac{n+2}{24}\pi < 2\pi$ で考えると，

$$\frac{n+2}{24}\pi = \frac{5}{3}\pi \text{ すなわち } n = 38$$

である．このとき，r の値は，$|z_{n+1}| = 2|z_n|$ すなわち $\dfrac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = r^{n+2} = 2$ より，

$$r^{40} = 2 \text{ すなわち } r = \sqrt[40]{2}$$

である．このときの z_n の偏角 θ は (2) より，

$$\theta = \arg z_{38} = \frac{38^2 + 3\cdot 38 - 2}{48}\pi = 32\pi + \frac{5}{12}\pi$$

である．以上より，求める n, r, θ の値は，

$$\boldsymbol{n = 38,\quad r = \sqrt[40]{2},\quad \theta = \frac{5}{12}\pi}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

◇ ♡

解説

(1) は，与えられた漸化式より z_2 を計算し，『ド・モアブルの定理』が使えることに気付けば，容易に求められます．

(2) は，漸化式を解くことになりますが，解答にあるように一つずつ n を下げて具体的に書き出すと計算の仕組みがわかってきます．公式のように漸化式を解く練習だけをしている人には少し難しい問題かもしれません．漸化式の仕組みを理解していれば解答できます．

(3) は，図形の問題です．まずは問題になっている直角三角形の各頂点の角度がいくらになるかを考えます．本問では，$\angle O = \dfrac{\pi}{3}$ と与えられているので，$|z_{n+1}| = 2|z_n|$ または $2|z_{n+1}| = |z_n|$ が考えられますが，解答にもあるように，$|z_{n+1}| > |z_n|$ が導かれるため三角形の形状は 1 つに決まります．あとは，偏角の計算と辺の比から n, r, θ を求めていきます．