7 ('15　一橋大) **【難易度】** … 標準

数列 $\{a_n\}$ を $a_k = k + \cos\left(\dfrac{k\pi}{6}\right)$ で定める．n を正の整数とする．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{12n} a_k$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{12n} {a_k}^2$ を求めよ．

【テーマ】：三角関数と和

方針

三角関数の周期性に着目します．$\cos\left(\dfrac{k\pi}{6}\right)$ において，$k = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ としてみると周期性が見えてくるでしょう．

♣ ♠

解答

(1) 与えられた a_k において，

$$\sum_{k=1}^{12n} a_k = \sum_{k=1}^{12n}\left\{k + \cos\left(\frac{k\pi}{6}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 12n(12n+1) + \sum_{k=1}^{12n}\cos\left(\frac{k\pi}{6}\right)$$
$$= 6n(12n+1) + \sum_{k=1}^{12n}\cos\left(\frac{k\pi}{6}\right) \cdots\cdots ①$$

である．ここで，

$$\cos\left(\frac{k+12}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{k\pi}{6}\right)\ ,\quad \cos\left(\frac{k+6}{6}\pi\right) = -\cos\left(\frac{k\pi}{6}\right)$$

が成り立つので，数列 $\left\{\cos\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)\right\}$ は，周期が 12 の周期数列である．よって，

$$\sum_{k=1}^{12n}\cos\left(\frac{k\pi}{6}\right) = n\sum_{k=1}^{12}\cos\left(\frac{k\pi}{6}\right)$$
$$= n\left\{\sum_{k=1}^{6}\cos\left(\frac{k\pi}{6}\right) + \sum_{k=1}^{6}\cos\left(\frac{k+6}{6}\pi\right)\right\}$$
$$= n\left\{\sum_{k=1}^{6}\cos\left(\frac{k\pi}{6}\right) - \sum_{k=1}^{6}\cos\left(\frac{k\pi}{6}\right)\right\} = 0 \cdots\cdots ②$$

であるから，①, ② より，

$$\sum_{k=1}^{12n} a_k = \boldsymbol{6n(12n+1)}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

(2) ${a_k}^2 = k^2 + 2k\cos\left(\dfrac{k\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\dfrac{k\pi}{6}\right)$ であるから，

$$\sum_{k=1}^{12n}{a_k}^2 = \sum_{k=1}^{12n}k^2 + 2\sum_{k=1}^{12n}k\cos\left(\frac{k\pi}{6}\right) + \sum_{k=1}^{12n}\cos^2\left(\frac{k\pi}{6}\right)$$

ここで，

$$\sum_{k=1}^{12n}k^2 = \frac{1}{6}\cdot 12n(12n+1)(24n+1) = 2n(12n+1)(24n+1)$$

$l = 1, 2, 3, \cdots\cdots, n$ に対して，

$$\begin{aligned}\sum_{k=12(l-1)+1}^{12l} k\cos\left(\frac{k\pi}{6}\right) &= (12l-11)\cos\frac{\pi}{6}+(12l-10)\cos\frac{2\pi}{6}+(12l-9)\cos\frac{3\pi}{6}\\ &\quad+(12l-8)\cos\frac{4\pi}{6}+(12l-7)\cos\frac{5\pi}{6}+(12l-6)\cos\frac{6\pi}{6}\\ &\quad+(12l-5)\cos\frac{7\pi}{6}+(12l-4)\cos\frac{8\pi}{6}+(12l-3)\cos\frac{9\pi}{6}\\ &\quad+(12l-2)\cos\frac{10\pi}{6}+(12l-1)\cos\frac{11\pi}{6}+12l\cos\frac{12\pi}{6}\\ &=\frac{\sqrt{3}}{2}(12l-11)+\frac{1}{2}(12l-10)\\ &\quad-\frac{1}{2}(12l-8)-\frac{\sqrt{3}}{2}(12l-7)-(12l-6)\\ &\quad-\frac{\sqrt{3}}{2}(12l-5)-\frac{1}{2}(12l-4)\\ &\quad+\frac{1}{2}(12l-2)+\frac{\sqrt{3}}{2}(12l-1)+12l\\ &=\frac{\sqrt{3}}{2}(12l-11-12l+7-12l+5+12l-1)\\ &\quad+\frac{1}{2}(12l-10-12l+8-12l+4+12l-2)\\ &\quad-12l+6+12l\\ &=6\end{aligned}$$

となるので，$\displaystyle\sum_{k=1}^{12n} k\cos\left(\frac{k\pi}{6}\right)=6n$ である．

また，数列 $\left\{\cos^2\left(\frac{k\pi}{6}\right)\right\}$ は周期が 6 の周期数列であるから，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{12n}\cos^2\left(\frac{k\pi}{6}\right) &= 2n\sum_{k=1}^{6}\cos^2\left(\frac{k\pi}{6}\right)\\ &=2n\left(\cos^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{2\pi}{6}+\cos^2\frac{3\pi}{6}+\cos^2\frac{4\pi}{6}+\cos^2\frac{5\pi}{6}+\cos^2\frac{6\pi}{6}\right)\\ &=2n\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+1\right)\\ &=2n(2+1)=6n\end{aligned}$$

以上より，求める和は，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{12n}{a_k}^2 &= 2n(12n+1)(24n+1)+12n+6n\\ &=2n\{(12n+1)(24n+1)+9\}\\ &=\boldsymbol{4n(144n^2+18n+5)}\cdots\cdots\textbf{(答)}\end{aligned}$$

である．

◇ ♡

解説

三角関数は，周期関数です．$f(x)=\cos x$ のとき，$f(x+2\pi)=f(x)$ が成り立つためです．三角関数の和を考える場合は，これに着目します．一般に $\cos x$ の周期は 2π であり，$\cos kx$ の周期は $\dfrac{2\pi}{k}$ となります．今回は，$\cos\left(\dfrac{k\pi}{6}\right)$ となっているので，周期が $\dfrac{2\pi}{\frac{k}{6}}=12$ となります．したがって，和を考える際は，12 個の和をセットで考えるとそれの繰り返しになります．問題文の Σ の上端の値が $12n$ なのはそのためです．(2) では，${a_k}^2$ を計算して，それぞれの項の和を考えますが，ここでも同様に周期に着目します．周期がわからない場合は，少し書き出してみれば周期がわかるでしょう．