6 （'15　信州大）　　【難易度】… 標準

次の条件 (∗) を満たすような実数 a で最大のものを求めよ．

(∗)　$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲のすべての x に対して $\cos x \leqq 1-ax^2$ が成り立つ．

【テーマ】：不等式の証明

方針

対称性に着目して考えます．$f(x)=1-ax^2-\cos x$ とおいて，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で常に $f(x) \geqq 0$ となるような最大の a の値を求めます．

♣　♠

解答

$f(x)=1-ax^2-\cos x$ とおくと，$y=f(x)$ のグラフは y 軸に関して対称なので，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で常に $f(x) \geqq 0$ となるような最大の a の値を求めればよい．$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で常に $f(x) \geqq 0$ となるためには，$f(0)=0$ であることから，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \geqq 0$ であることが必要である．

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{\pi^2}{4}a \geqq 0 \text{ すなわち } a \leqq \frac{4}{\pi^2}$$

よって，$a=\dfrac{4}{\pi^2}$ のとき，すなわち $f(x)=1-\dfrac{4}{\pi^2}x^2-\cos x$ において，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で常に $f(x) \geqq 0$ であるかどうかを確かめる．

$$f'(x)=-\frac{8}{\pi^2}x+\sin x$$
$$f''(x)=-\frac{8}{\pi^2}+\cos x$$

より，$f''(x)=0$ とすると，$\cos x=\dfrac{8}{\pi^2}$ であり，$0 \leqq \dfrac{8}{\pi^2} \leqq 1$ であるから，$\cos x=\dfrac{8}{\pi^2}$ を満たす x の値は $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲でただ 1 つ存在する．その x の値を α とおく．このとき，$f'(x)$ の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	$1-\dfrac{4}{\pi}$

$$f'(0)=0$$
$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{8}{\pi^2}\cdot\frac{\pi}{2}+1=1-\frac{4}{\pi}<0$$

ゆえに，$\alpha \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，$f'(x)=0$ となる x の値がただ 1 つ存在する．その x の値を β とおく．
このとき，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	β	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

ゆえに，$a=\dfrac{4}{\pi^2}$ のとき，$f(x) \geqq 0$ となるので，a の値の最大値は，$\boldsymbol{a=\dfrac{4}{\pi^2}}$ ……(**答**)

♢　♡

解説

本問は，解答にあるように先に必要条件を求め，その十分性を確認するという方針で解くと解き易くなります．この考え方は，一度経験していないと難しいと感じるかもしれませんが非常に大切な考え方です．

必要条件を求めるというのをもう少し詳しく説明しましょう．条件 $(*)$ を満たすような a の値で最大のものを考えたいので, まず, 方針 や 解答 の始めにあるように, 対称性を用いて, $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で常に $f(x) \geqq 0$ となるときを考えます．ここで，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で常に $f(x) \geqq 0$ となるためには, **少なくとも** $f(0) \geqq 0$ や $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \geqq 0$ が成り立っていなければいけません．これが必要条件です．(条件を満たすために**最低限必要な条件**ということです．) $f(0) = 0$ なので，これは大丈夫ですが，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ は a を含む式になりますから，この値が少なくとも 0 以上でなければいけません．ただし，これは定義域の両端を調べたに過ぎませんから，間の値でも常に 0 以上になるという保障はありません．これを保障するために（十分性を確認するために）$a = \dfrac{4}{\pi^2}$ として，本当に $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で常に $f(x) \geqq 0$ となっているかどうかを確認する必要があります.

グラフをかくと様子がわかりますが，$y = \cos x$ と $y = 1 - ax^2$ $(a > 0)$ のグラフはどちらも考えている区間では上に凸で，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で単調減少です．かなり，似た形をしているため，自分でかいたグラフでは判断つきません．コンピュータを用いないとどちらが上にあるかはわからないですよね？だから十分性の確認は必要不可欠です．明らかな場合でも一言触れる必要はあります．（ちゃんと考えているアピールをしましょう！）下図は，細線が $y = 1 - \dfrac{4}{\pi^2}x^2$ のグラフで，太線が $y = \cos x$ のグラフです.