

34 (’15 東京工業大)

【難易度】… 難

$a > 0$ とする. 曲線 $y = e^{-x^2}$ と x 軸, y 軸, および直線 $x = a$ で囲まれた図形を, y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を A とする.

- (1) A の体積 V を求めよ.
- (2) 点 $(t, 0)$ ($-a \leq t \leq a$) を通り x 軸と垂直な平面による A の切り口の面積を $S(t)$ とするとき, 不等式 $S(t) \leq \int_{-a}^a e^{-(s^2+t^2)} ds$ を示せ.
- (3) 不等式 $\sqrt{\pi(1 - e^{-a^2})} \leq \int_{-a}^a e^{-x^2} dx$ を示せ.

【テーマ】: 回転体の体積

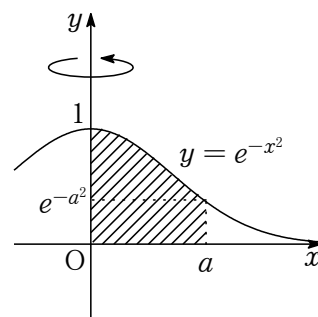
方針

(1) は, y 軸まわりに回転させるので, y 方向に積分をします. 曲線部分の回転と円柱の体積を合わせて考えると積分が少し楽でしょう. (2) は, 回転体を $x = t$ で切り取った部分の面積を計算するので, 切り口の図形を考えます. (3) は, (1), (2) の結果を利用しましょう.

解答

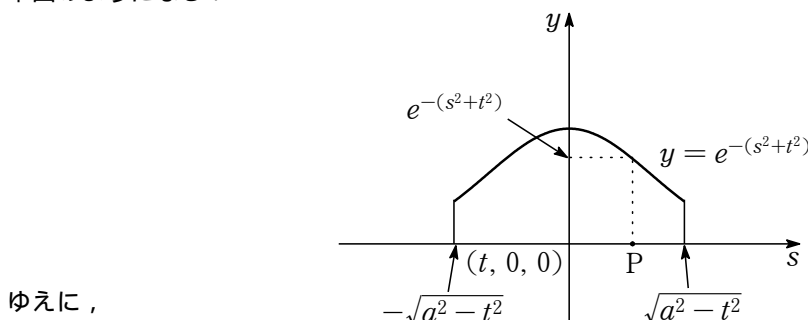
- (1) $y = e^{-x^2}$ のグラフは右図のようになり, 図の斜線部分を y 軸のまわりに 1 回転させたときの回転体が A である. $y = e^{-x^2}$ より, $x^2 = -\log y$ であるから,

$$\begin{aligned} V &= \pi a^2 e^{-a^2} + \int_{e^{-a^2}}^1 \pi x^2 dy \\ &= \pi a^2 e^{-a^2} - \pi \int_{e^{-a^2}}^1 \log y dy \\ &= \pi a^2 e^{-a^2} - \pi \left[y \log y - y \right]_{e^{-a^2}}^1 \\ &= \pi a^2 e^{-a^2} - \pi \{ -1 - (e^{-a^2}(-a^2) - e^{-a^2}) \} \\ &= \pi (1 - e^{-a^2}) \dots \dots (\text{答}) \end{aligned}$$



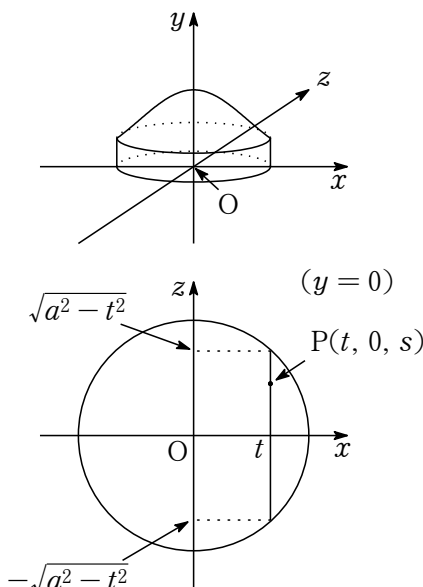
- (2) 【証明】

xy 平面に対して垂直方向に z 軸を定め, xz 平面において直線 $x = t$ 上に点 $P(t, 0, s)$ をとる. このとき, $OP^2 = t^2 + s^2$ であるから, 平面 $x = t$ による切り口は, 下図のようになる.



ゆえに,

$$S(t) = \int_{-\sqrt{a^2-t^2}}^{\sqrt{a^2-t^2}} e^{-(s^2+t^2)} ds$$



ここで、 $e^{-(s^2+t^2)} > 0$ であり、 $-a \leq -\sqrt{a^2-t^2} \leq s \leq \sqrt{a^2-t^2} \leq a$ より、

$$S(t) \leq \int_{-a}^a e^{-(s^2+t^2)} ds$$

が示された。

(証明終)

(3) 【証明】

(2) より、

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^a S(t) dt \leq \int_{-a}^a \int_{-a}^a e^{-(s^2+t^2)} ds dt \\ &= \int_{-a}^a e^{-t^2} \int_{-a}^a e^{-s^2} ds dt \\ &= \int_{-a}^a e^{-s^2} ds \int_{-a}^a e^{-t^2} dt \\ &= \left(\int_{-a}^a e^{-x^2} dx \right)^2 \end{aligned}$$

ゆえに、(1) の結果から、

$$\pi(1 - e^{-a^2}) \leq \left(\int_{-a}^a e^{-x^2} dx \right)^2$$

であるから、両辺正より、

$$\sqrt{\pi(1 - e^{-a^2})} \leq \int_{-a}^a e^{-x^2} dx$$

が示された。

(証明終)



解説

(1) は、 y 軸に関する回転体の体積なので、基本問題です。バウムクーヘン積分で求めることもできます。解答は、円柱の体積 $\pi a^2 e^{-a^2}$ と $y = e^{-x^2}$ ($e^{-a^2} \leq y \leq 1$) 部分を y 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積を合わせています。

(2) のポイントは、切り口の図形がどのような形になるかです。 $y = e^{-x^2}$ を y 軸のまわりに回転させているので、 OP^2 を求めることで、原点からの距離を考えます。これが、 $y = e^{-x^2}$ の x に対応します。したがって、切り口の上部に現れる曲線は、 $y = e^{-OP^2}$ の形になることがわかります。あとは、これを積分して

$$-a \leq -\sqrt{a^2-t^2} \leq s \leq \sqrt{a^2-t^2} \leq a$$

を用いれば証明したい式が得られます。これは、 $e^{-x^2} > 0$ なので、積分区間を広くとれば、定積分の値が大きくなるということを利用してしています。

(3) は、(1)、(2) を利用します。ポイントは、 $\int_{-a}^a e^{-s^2} ds$ が定数になるということを利用することです。また、定積分の値は、積分変数によらず同じ値をとります。したがって、

$$\int_{-a}^a e^{-s^2} ds = \int_{-a}^a e^{-t^2} dt = \int_{-a}^a e^{-x^2} dx$$

が成り立ちます。