

34 ('15 東京工業大)

【難易度】… 難

$a > 0$ とする。曲線 $y = e^{-x^2}$ と x 軸, y 軸, および直線 $x = a$ で囲まれた図形を, y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を A とする。

(1) A の体積 V を求めよ。

(2) 点 $(t, 0)$ ($-a \leq t \leq a$) を通り x 軸と垂直な平面による A の切り口の面積を $S(t)$ とするとき, 不等式 $S(t) \leq \int_{-a}^a e^{-(s^2+t^2)} ds$ を示せ。

(3) 不等式 $\sqrt{\pi(1 - e^{-a^2})} \leq \int_{-a}^a e^{-x^2} dx$ を示せ。