29 ('15 広島大) **【難易度】** … 標準

n を自然数とし，p_n, q_n を実数とする．ただし，p_1, q_1 は ${p_1}^2-4q_1=4$ を満たすとする．2 次方程式 $x^2-p_nx+q_n=0$ は異なる実数解 α_n, β_n をもつとする．ただし，$\alpha_n<\beta_n$ とする．$c_n=\beta_n-\alpha_n$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ は

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする．次の問いに答えよ．

(1) $r_n=\log_2(n\sqrt{n}+\sqrt{n})$ とするとき，$\dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}$ を r_n, r_{n+1} を用いて表せ.

(2) c_n を n の式で表せ.

(3) $p_n=n\sqrt{n}$ であるとき，q_n を n の式で表せ.

【テーマ】：隣接２項間漸化式

方針

(1) は，底が 2 の対数をとります．(2) は，(1) の結果を使って，$\dfrac{c_{n+1}}{c_n}$ を計算し，数列 $\{c_n\}$ の漸化式を作ります．(3) は，2 次方程式の解の差を求めることで，c_n を p_n と q_n で表します．

♣ ♠

解答

(1)
$$\begin{aligned}\log_2\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}&=\log_2\frac{(n+2)\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}(n+1)}\\&=\log_2(n+2)\sqrt{n+1}-\log_2\sqrt{n}(n+1)\\&=\log_2\{(n+1)\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}\}-\log_2(n\sqrt{n}+\sqrt{n})\\&=r_{n+1}-r_n\end{aligned}$$

よって，

$$\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}=\mathbf{2^{(r_{n+1}-r_n)}}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2) (1) より，

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}=2^{(r_{n+1}-r_n)}\iff\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{2^{r_{n+1}}}{2^{r_n}}\iff c_{n+1}=\frac{2^{r_{n+1}}}{2^{r_n}}c_n$$

であるから，

$$\begin{aligned}c_n&=\frac{2^{r_n}}{2^{r_{n-1}}}c_{n-1}\\&=\frac{2^{r_n}}{2^{r_{n-1}}}\cdot\frac{2^{r_{n-1}}}{2^{r_{n-2}}}c_{n-2}\\&=\frac{2^{r_n}}{2^{r_{n-1}}}\cdot\frac{2^{r_{n-1}}}{2^{r_{n-2}}}\cdot\frac{2^{r_{n-2}}}{2^{r_{n-3}}}c_{n-3}\\&=\cdots\cdots\\&=\frac{2^{r_n}}{2^{r_{n-1}}}\cdot\frac{2^{r_{n-1}}}{2^{r_{n-2}}}\cdot\frac{2^{r_{n-2}}}{2^{r_{n-3}}}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{2^{r_2}}{2^{r_1}}c_1\\&=\frac{2^{r_n}}{2^{r_1}}c_1\end{aligned}$$

$r_1=\log_2(1+1)=1$ である．また，$2^{r_n}=2^{\log_2(n\sqrt{n}+\sqrt{n})}=n\sqrt{n}+\sqrt{n}$ であるから，

$$c_n=\frac{\sqrt{n}(n+1)}{2}c_1$$

一方，2 次方程式 $x^2 - p_n x + q_n = 0$ が異なる 2 つの実数解 $\alpha_n, \beta_n\ (\alpha_n < \beta_n)$ をもつことから，

${p_n}^2 - 4q_n > 0$ であり，その 2 解の差 c_n は，

$$c_n = \beta_n - \alpha_n = \sqrt{{p_n}^2 - 4q_n}$$

となる．したがって，$c_1 = \sqrt{{p_1}^2 - 4q_1} = \sqrt{4} = 2$ である．ゆえに，

$$c_n = \frac{\sqrt{n}(n+1)}{2} \cdot 2$$ より，$\boldsymbol{c_n = \sqrt{n}(n+1)}$……**(答)**

(3) (2) より，

$$c_n = \sqrt{n}(n+1) \iff \sqrt{{p_n}^2 - 4q_n} = \sqrt{n}(n+1)$$

ここで，$p_n = n\sqrt{n}$ より，${p_n}^2 = (n\sqrt{n})^2 = n^3$ であるから，

$$\sqrt{n^3 - 4q_n} = \sqrt{n}(n+1)$$

であり，両辺を 2 乗して，

$$n^3 - 4q_n = n(n+1)^2$$

$$4q_n = n^3 - n(n^2 + 2n + 1)$$

$$4q_n = -n(2n+1)$$

$$\therefore\ \boldsymbol{q_n = -\frac{1}{4}n(2n+1)}$$……**(答)**

解説

(1) は，意外と方針に悩んだ人も多いのではないでしょうか？ポイントは，$r_n = \log_2(n\sqrt{n} + \sqrt{n})$ と置いていることです．これをヒントに，底が 2 の対数をとることを考えますが，今度は $\dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}$ をどのように変形するかが問題となります．そこで，真数部分の $n\sqrt{n} + \sqrt{n}$ に着目して，$\sqrt{n}(n+1)$ を作ることを考えます．そのため，$\dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}$ の分子分母に $\sqrt{n+1}$ をかけることで分母を $\sqrt{n}(n+1)$ にして，r_n を作ります．

(2) は，数列 $\{c_n\}$ に関する漸化式を導きます．$c_{n+1} = \dfrac{2^{r_{n+1}}}{2^{r_n}} c_n$ が解けるかどうかがポイントです．これは，n を一つずつ下げて繰り返しこの漸化式を用いるだけです．つまり，

$$c_n = \frac{2^{r_n}}{2^{r_{n-1}}} c_{n-1} \cdots\cdots ①$$

$$c_{n-1} = \frac{2^{r_{n-1}}}{2^{r_{n-2}}} c_{n-2} \cdots\cdots ②$$

$$c_{n-2} = \frac{2^{r_{n-2}}}{2^{r_{n-3}}} c_{n-3} \cdots\cdots ③$$

$$\vdots$$

として，② を ① へ代入して得られた式に ③ を代入することを c_1 になるまで繰り返します．後半は，c_1 の値が必要になりますが，(3) で c_n が必要になることを考えて，$c_n = \beta_n - \alpha_n$ を求めました．ちなみに，2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 解 α, β の差は，$D = b^2 - 4ac$ として，

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{D}}{|a|}$$

で表されることは，知っておくとよいでしょう．解の公式を使えば簡単に示せます．