26 （'14　北海道大） 【難易度】 … 標準

$f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{3}} |\sin\theta|\,d\theta$ とおく．

（1） $f'(x)$ を求めよ．

（2） $0 \leqq x \leqq \pi$ における $f(x)$ の最大値と最小値，およびそのときの x を求めよ．

【テーマ】：絶対値を含む定積分

方針

(1) は，微分積分学の基本定理を用います．(2) は，(1) で求めた $f'(x)$ を用いて増減表をかきますが，絶対値があるため場合分けが必要になります．

♣ ♠

解答

（1） 微分積分学の基本定理より，

$$f'(x)=\left|\boldsymbol{\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}\right|-|\boldsymbol{\sin x}|\cdots\cdots(\text{答})$$

（2） $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，$\frac{\pi}{3} \leqq x+\frac{\pi}{3} \leqq \frac{4}{3}\pi$ であるから，

（i） $\frac{\pi}{3} \leqq x+\frac{\pi}{3} \leqq \pi$ すなわち $0 \leqq x \leqq \frac{2}{3}\pi$ のとき，$f'(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin x$

（ii） $\pi \leqq x+\frac{\pi}{3} \leqq \frac{4}{3}\pi$ すなわち $\frac{2}{3}\pi \leqq x \leqq \pi$ のとき，$f'(x)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin x$

（i）において，$f'(x)=0$ のとき，$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin x$ であるから，

$$\pi-x=x+\frac{\pi}{3} \iff x=\frac{\pi}{3}$$

（ii）において，$f'(x)=0$ のとき，$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin x$ であるから，

$$2\pi-x=x+\frac{\pi}{3} \iff x=\frac{5}{6}\pi$$

よって，増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↗	1	↘	$\frac{1}{2}$	↘	$2-\sqrt{3}$	↗	$\frac{1}{2}$

$$f(0)=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\theta\,d\theta=\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}\sin\theta\,d\theta=\Big[-\cos\theta\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}=1$$

$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\sin\theta\,d\theta=\Big[-\cos\theta\Big]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}=\frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{5}{6}\pi\right)=\int_{\frac{5}{6}\pi}^{\frac{7}{6}\pi}\sin\theta\,d\theta=\int_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi}\sin\theta\,d\theta+\int_{\pi}^{\frac{7}{6}\pi}(-\sin\theta)\,d\theta$$

$$=\Big[-\cos\theta\Big]_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi}+\Big[+\cos\theta\Big]_{\pi}^{\frac{7}{6}\pi}=2-\sqrt{3}$$

$$f(\pi)=\int_{\pi}^{\frac{4}{3}\pi}(-\sin\theta)\,d\theta=\Big[\cos\theta\Big]_{\pi}^{\frac{4}{3}\pi}=\frac{1}{2}$$

ゆえに，$f(x)$ の最大値と最小値は，

$$\begin{cases}\textbf{最大値：}\ \boldsymbol{1} & \left(\boldsymbol{x=\frac{\pi}{3}}\right)\\ \textbf{最小値：}\ \boldsymbol{2-\sqrt{3}} & \left(\boldsymbol{x=\frac{5}{6}\pi}\right)\end{cases}\quad\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

(1) は，次の微分積分学の基本定理を用います．頻出ですから必ず使えるようにしましょう．本問では，(ii) を用いています．

公式 **【微分積分学の基本定理】**

a を定数，x は t に無関係な変数，$g(x)$, $h(x)$ は連続で微分可能な関数とする．

(i) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$

(ii) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt=f(g(x))g'(x)-f(h(x))h'(x)$

(2) は，絶対値を外さなければ積分ができないため，x による場合分けが必要になります．なお，$f'(x)=0$ を解く際は x の値の範囲に注意をして解きましょう．三角関数において，

$$\sin(\pi-x)=\sin x,\quad \sin(2\pi-x)=-\sin x$$

が成り立つことを用いて解いています．