25 （′15　大阪大）　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**【難易度】** … 標準

平面上に長さ 2 の線分 AB を直径とする円 C がある．2 点 A, B を除く C 上の点 P に対し，AP = AQ となるように線分 AB 上の点 Q をとる．また，直線 PQ と円 C の交点のうち，P でない方を R とする．このとき，以下の問いに答えよ．

（1） $\triangle$AQR の面積を $\theta = \angle$PAB を用いて表せ．

（2） 点 P を動かして $\triangle$AQR の面積が最大になるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を用いて表せ．

【テーマ】：三角関数とベクトル

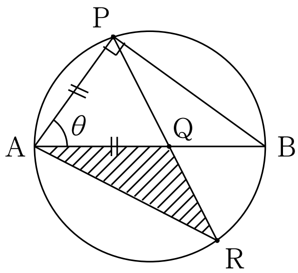
方針

(1) は，平面図形の知識と三角関数を用いて三角形の面積を求めます．(2) は，θ の値が求められるので，それを用いて辺比を求めてベクトル表記をします．円の中心を設定すると計算量が減らせて楽になります．

♣　♠

解答

（1） $\angle \mathrm{APB} = \dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\mathrm{AP} = \mathrm{AB}\cos\theta = 2\cos\theta$ である．



また，$\angle \mathrm{APQ} = \dfrac{\pi-\theta}{2}$ より，

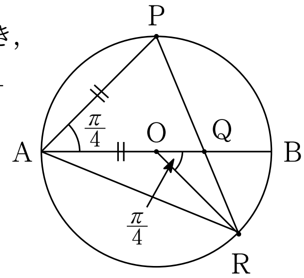
$$\angle \mathrm{QPB} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) = \frac{\theta}{2}$$

であるから，$\overset{\frown}{\mathrm{BR}}$ に対する円周角が等しいことより，$\angle \mathrm{BAR} = \dfrac{\theta}{2}$ である．

また，$\angle \mathrm{ARB} = \dfrac{\pi}{2}$ であることから，$\mathrm{AR} = \mathrm{AB}\cos\dfrac{\theta}{2} = 2\cos\dfrac{\theta}{2}$ となるので，

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{AQR} &= \frac{1}{2}\cdot \mathrm{AQ}\cdot \mathrm{AR}\cdot \sin\frac{\theta}{2}\\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\cos\theta\cdot 2\cos\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2}\\ &= \boldsymbol{\cos\theta\sin\theta}\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

（2） (1) より，$\triangle \mathrm{AQR} = \dfrac{1}{2}\sin 2\theta$ であるから，$2\theta = \dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，$\triangle$AQR の面積は最大となる．このとき，円の中心を O とすると，$\angle \mathrm{BOR} = \dfrac{\pi}{4}$ であるから，BP // OR となる．さらに，OR = 1, BP = $\sqrt{2}$ であるから，



$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\mathrm{PB}}$$

が成り立つ．よって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AR}} &= \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\mathrm{PB}}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}}\right) = \boldsymbol{\frac{1+\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}}}\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

♢　♡

解説

解答だけ見るとあっさり解けそうだが，図形的な要素が濃い問題なので，意外と難しく感じる問題でしょう．特に，(2) は，円の中心を設定しないと多くの計算を強いられるため大変です．もちろん円の中心を設定しなくても解くことはできます．その際は，AQ : QB = $\sqrt{2}$: 2 となることと，PQ : QR を求めなければならないため，結構計算量が多くなり大変です．ちなみに PQ : QR = $\sqrt{2}$: 1 となります．