

14 ('06 愛媛大)

【難易度】…標準

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を

$$a_1 = b_1 = 0, \quad a_{n+1} = a_n + 2, \quad b_{n+1} = a_n + b_n + \frac{4}{3} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める .

(1) 一般項 a_n, b_n を求めよ .(2) 関数の列 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を

$$\begin{cases} f_1(x) = x^2 \\ f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} \int_x^{x+2} f_n(t) dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

によって定める .

(ア) $f_2(x), f_3(x)$ を求めよ .(イ) すべての自然数 n について, $f_n(x) = x^2 + a_n x + b_n$ が成り立つことを, 数学的帰納法によって証明せよ .