9 （'14 大阪大） 【難易度】 … 標準

さいころを繰り返し投げ，n 回目に出た目を X_n とする．n 回目までに出た目の積 $X_1X_2\cdots X_n$ を T_n で表す．T_n を 5 で割った余りが 1 である確率を p_n とし，余りが 2, 3, 4 のいずれかである確率を q_n とする．

（1） p_n+q_n を求めよ．

（2） p_{n+1} を p_n と n を用いて表せ．

（3） $r_n=\left(\dfrac{6}{5}\right)^n p_n$ とおいて r_n を求めることにより，p_n を n の式で表せ．

【テーマ】：確率と漸化式

方針

(1) は，T_n が 5 で割り切れない確率を求める問題です．(2) は，数列 $\{p_n\}$ の漸化式を立式します．(3) は誘導通りに解きます．

♣ ♠

解答

（1） p_n+q_n は T_n が 5 で割り切れない確率を表している．よって，$X_1, X_2, \cdots\cdots X_n$ がすべて 5 以外であればよいので，求める確率は，

$$p_n+q_n=\left(\frac{5}{6}\right)^n\cdots\cdots(\text{答})$$

（2） T_n を 5 で割った余りが 1 のとき，T_{n+1} を 5 で割った余りが 1 となるためには，X_{n+1} が 1 または 6 であればよい．また，T_n を 5 で割った余りが 2, 3, 4 の場合は，X_{n+1} がそれぞれ 3, 2, 4 であればよい．さらに，T_n が 5 の倍数のときは，T_{n+1} を 5 で割った余りが 1 となることはない．ゆえに，

$$p_{n+1}=\frac{2}{6}p_n+\frac{1}{6}q_n$$

が成り立つ．(1) の結果を用いると，

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{6}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n-p_n\right\}\iff \boldsymbol{p_{n+1}=\frac{1}{6}p_n+\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^n}\cdots\cdots(\text{答})$$

（3） (2) で求めた漸化式の両辺に $\left(\dfrac{6}{5}\right)^{n+1}$ をかけると，

$$\left(\frac{6}{5}\right)^{n+1}p_{n+1}=\left(\frac{6}{5}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{6}p_n+\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{5}\iff\left(\frac{6}{5}\right)^{n+1}p_{n+1}=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^n p_n+\frac{1}{5}$$

と変形できるので，$r_n=\left(\dfrac{6}{5}\right)^n p_n$ とおくと，

$$r_{n+1}=\frac{1}{5}r_n+\frac{1}{5}\iff r_{n+1}-\frac{1}{4}=\frac{1}{5}\left(r_n-\frac{1}{4}\right)$$

である．$p_1=\dfrac{1}{3}$ より，$r_1=\dfrac{6}{5}p_1=\dfrac{2}{5}$ であるから，数列 $\left\{r_n-\dfrac{1}{4}\right\}$ は初項 $\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{20}$，公比 $\dfrac{1}{5}$ の等比数列である．

$$\therefore\ r_n-\frac{1}{4}=\frac{3}{20}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\iff r_n=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n+\frac{1}{4}$$

ゆえに，

$$p_n=\left(\frac{5}{6}\right)^n r_n=\boldsymbol{\frac{1}{4}\left(\frac{5}{6}\right)^n+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^n}\cdots\cdots(\text{答})$$

◇ ♡

解説

漸化式を作るときは，番号 n の状況と，番号 $n+1$ の状況を考えます.（1）は，漸化式を作らなくても題意をきちんと理解できれば容易に求められます.（2）は T_n を 5 で割ったときの余りが，0 か 1 か 2, 3, 4 の 3 つの場合を考えます．余りが 2, 3, 4 のときは，どの場合も確率 $\dfrac{1}{6}$ で T_{n+1} を 5 で割った余りが 1 となることに注意が必要です．すべて同じ確率になるため，まとめて $\dfrac{1}{6}q_n$ とできます．もしも，異なる確率である場合は，分けて考える必要があるため面倒になります.（3）は，誘導がありますが,（2）の漸化式の解き方を知っている人にとっては不要な誘導でしょう.