**8** （'14　東京工業大） **【難易度】** … やや難

$a>1$ とし，次の不等式を考える．

$$(*) \quad \frac{e^t-1}{t} \geqq e^{\frac{t}{a}}$$

（1） $a=2$ のとき，すべての $t>0$ に対して上の不等式 $(*)$ が成り立つことを示せ．

（2） すべての $t>0$ に対して上の不等式 $(*)$ が成り立つような $a$ の範囲を求めよ．

**【テーマ】：不等式の証明**

**方針**

分母を払って考えます．(2) では，(1) の結果に着目すると方針が立て易くなります．

---

**解答**

（1） $(*)$ の式は，

$$\frac{e^t-1}{t} \geqq e^{\frac{t}{a}} \iff e^t-1 \geqq te^{\frac{t}{a}}$$

と変形できる．$f(t)=e^t-1-te^{\frac{t}{a}}$ とおく．$a=2$ のとき，$t>0$ において $f(t) \geqq 0$ であることを示せばよい．

**【証明】**

$$\begin{aligned} f'(t) &= e^t - \left(e^{\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}te^{\frac{t}{2}}\right) \\ &= e^{\frac{t}{2}}\left(e^{\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}t - 1\right) \end{aligned}$$

である．一方，$g(t)=e^{\frac{t}{2}}-\frac{1}{2}t-1$ とおくと，

$$g'(t) = \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}} - \frac{1}{2} > 0 \quad (\because t>0)$$

であるから，$g(t)$ は単調増加である．$g(0)=0$ であるから，$t>0$ において $g(t)>0$ であることがわかる．

よって，$f'(t)>0$ となるので，$f(t)$ は単調増加である．$f(0)=0$ であるから，$t>0$ において $f(t)>0$ であることがわかる．ゆえに，示された． **（証明終）**

（2） (i) $a \geqq 2$ のとき，$e^{\frac{t}{2}} \geqq e^{\frac{t}{a}}$ であることから，(1) の結果より $t>0$ において $(*)$ は成り立つ．

(ii) $1<a<2$ のときを考える．(1) と同様に $f(t)$ を定める．

$$f'(t) = e^t - \left(e^{\frac{t}{a}} + \frac{1}{a}te^{\frac{t}{a}}\right) = e^{\frac{t}{a}}\left\{e^{\left(1-\frac{1}{a}\right)t} - \frac{t}{a} - 1\right\}$$

である．一方，$h(t)=e^{\left(1-\frac{1}{a}\right)t}-\frac{t}{a}-1$ とおくと，

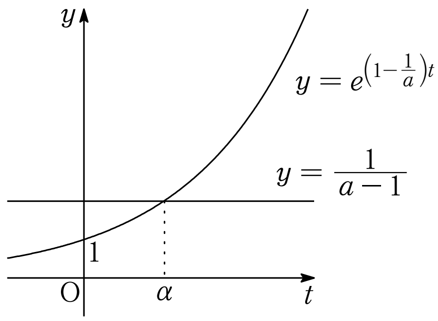
$$\begin{aligned} h'(t) &= \left(1-\frac{1}{a}\right)e^{\left(1-\frac{1}{a}\right)t} - \frac{1}{a} \\ &= \left(1-\frac{1}{a}\right)\left\{e^{\left(1-\frac{1}{a}\right)t} - \frac{\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{a}}\right\} \\ &= \left(1-\frac{1}{a}\right)\left\{e^{\left(1-\frac{1}{a}\right)t} - \frac{1}{a-1}\right\} \end{aligned}$$

$1 < a < 2$ であるから，$1-\dfrac{1}{a} > 0$，$\dfrac{1}{a-1} > 1$ である．したがって，方程式

$$e^{\left(1-\frac{1}{a}\right)t} = \frac{1}{a-1}$$

は，ただ 1 つの正の解をもつ．この正の解を $\alpha$ とする．

よって，$0 < t < \alpha$ で $h'(t) < 0$ となるので，この区間で $h(t)$ は単調減少する．$h(0)=0$ であることから，$h(t) < 0$ となるため，この区間で $f'(t) < 0$ となる．$f(0)=0$ であるから，$f(t) < 0$ となるので，題意を満たさず不適である．




ゆえに，求める $a$ の値の範囲は，$\boldsymbol{a \geqq 2}$……(**答**)

◇ ♡

**解説**

(1) は，与えられた分数式のままで $f(t) = \dfrac{e^t-1}{t} - e^{\frac{t}{a}}$ とおくと，微分の計算が大変であり，その後の計算も苦労します．そこで，このような場合は，示したい不等式を同値変形しておきます．本問は $t > 0$ という条件のもとで考えるため分母を払うことができます．もしも，$t$ がすべての実数という条件がある場合は，$t > 0$, $t < 0$ で場合分けをして分母を払いましょう．

(2) は，(1) がヒントとなります．方針は同じようにできますが，$a$ が残っているため処理が面倒です．$a \geqq 2$ のとき，$e^{\frac{t}{2}} \geqq e^{\frac{t}{a}}$ が成り立つことに気付ければ $1 < a < 2$ を考えればよいことに気付くでしょう．しかし，この場合 $f(t)$ はすべての $t > 0$ に対して，単調増加や単調減少になるわけではありません．なぜなら $h'(t) = 0$ を満たす正の実数 $t$ が存在するためです．グラフを見れば，$0 < t < \alpha$ で $h'(t) < 0$ となることがわかるため，この区間では $h(t)$ が単調減少になっていることがわかります．これを用いて，$1 < a < 2$ の場合は，題意を満たさないことを示します．