3 （'07　東京大） 【難易度】 … やや難

n と k を正の整数とし，$P(x)$ を次数が n 以上の整式とする．整式 $(1+x)^k P(x)$ の n 次以下の項の係数がすべて整数ならば，$P(x)$ の n 次以下の項の係数は，すべて整数であることを示せ．ただし，定数項については，項それ自身を係数とみなす．

【テーマ】：整式

方針

次数が低い項の係数から順に考えることで，帰納的に証明できます．

解答

【証明】

m を $m \geqq n$ を満たす正の整数とし，$P(x)$ の x^j $(0 \leqq j \leqq m)$ の係数を a_j とすると，

$$(1+x)^k P(x) = (1 + {}_k\mathrm{C}_1 x + {}_k\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots\cdots + {}_k\mathrm{C}_k x^k) \times$$
$$\times (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\cdots + a_n x^n + \cdots\cdots + a_m x^m)$$

である．また，$Q(x) = (1+x)^k P(x)$ に対して，x^j の係数を b_j とすると，題意より，b_j は整数である．

$b_0 = a_0$ であるから，a_0 は整数である．また，$1 \leqq j \leqq n$ に対して，x^j の係数 b_j は，

$$b_j = a_j + {}_k\mathrm{C}_1 a_{j-1} + {}_k\mathrm{C}_2 a_{j-2} + \cdots\cdots + {}_k\mathrm{C}_j a_0$$

である．ただし，$k < i$ のときは ${}_k\mathrm{C}_i = 0$ とする．これより，

$$a_j = b_j - {}_k\mathrm{C}_1 a_{j-1} - {}_k\mathrm{C}_2 a_{j-2} - \cdots\cdots - {}_k\mathrm{C}_j a_0 \quad \cdots\cdots ①$$

となる．なお，${}_k\mathrm{C}_j$ は組合せの総数であるから整数である．

(i)　$j = 1$ のとき，$a_1 = b_1 - {}_k\mathrm{C}_1 a_0$ となるので，b_1, a_0 が整数であることから，a_1 は整数である．

(ii)　$j = l$ $(0 \leqq l \leqq n-1)$ のとき，$a_0, a_1, \cdots\cdots, a_l$ がすべて整数であると仮定すると，① より，

$$a_{l+1} = b_{l+1} - {}_k\mathrm{C}_1 a_l - {}_k\mathrm{C}_2 a_{l-1} - \cdots\cdots - {}_k\mathrm{C}_{l+1} a_0$$

　であるから，b_{l+1} が整数であることと仮定より，a_{l+1} は整数である．

(i), (ii) より，数学的帰納法によって $P(x)$ の係数 a_j $(0 \leqq j \leqq n)$ は整数であることが示された． **(証明終)**

解説

与えられた整式 $P(x)$ の次数が n 以上とあるので，具体的にそれを表すことで $(1+x)^k P(x)$ を計算することができます．わかりにくい場合は，次数を小さくして実験をしてみましょう．例えば，$k = 2$, $P(x)$ を 3 次式として，

$$(1+x)^2 P(x) = (1 + 2x + x^2)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)$$
$$= \underbrace{a_3}_{b_5} x^5 + \underbrace{(2a_3 + a_2)}_{b_4} x^4 + \underbrace{(a_3 + 2a_2 + a_1)}_{b_3} x^3 + \underbrace{(a_2 + 2a_1 + a_0)}_{b_2} x^2 + \underbrace{(a_1 + 2a_0)}_{b_1} x + \underbrace{a_0}_{b_0}$$

と展開します．展開するときは，$(1 + 2x + x^2)$ と $(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)$ からそれぞれ 1 つずつ項を取り出してかけるので，x^3 の項であれば，$1 \times a_3 x^3$, $2x \times a_2 x^2$, $x^2 \times a_1 x$ の 3 つがあるので，それをすべて加えたものが x^3 の項になります．この規則に従って展開をすれば上記のようになります．

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto

この展開の仕組みを理解することこそが，本問解法の第一歩となります．$k=2$ として実験をしましたが，$(1+x)^k$ のまま展開をすると，二項定理が必要になります．この係数は，${}_k\mathrm{C}_j$ で表されるため先ほどの展開の仕組みから，解答にある b_j が

$$b_j = a_j + {}_k\mathrm{C}_1 a_{j-1} + {}_k\mathrm{C}_2 a_{j-2} + \cdots\cdots + {}_k\mathrm{C}_j a_0$$

となります．$a_0 = b_0$ であることから，a_0 は整数であることがわかるため，以下数学的帰納法で証明すればよいのです．このように，抽象的な問題や一般化された問題に対しては，具体的な値で実験をして『問題の本質』や『計算の仕組み』などを理解することが問題解決の大きな鍵となることを演習を通じて学んでください．

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto