34 （'10　九州大）　　**【難易度】** … 標準

中心 $(0,\ a)$，半径 a の円を xy 平面上の x 軸の上を x の正の方向に滑らないように転がす．このとき円上の定点 P が原点 $(0,\ 0)$ を出発するとする．次の問いに答えよ．

(1)　円が角 t だけ回転したとき，点 P の座標を求めよ．

(2)　t が 0 から 2π まで動いて円が一回転したときの点 P の描く曲線を C とする．曲線 C と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ．

(3)　(2) の曲線 C の長さを求めよ．

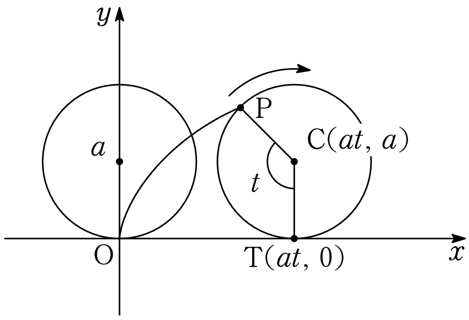
【テーマ】：曲線の長さ

方針

(1) は，ベクトルを用いて点 P の座標を求めると楽に求められます．(2) 以降は，公式に当てはめて計算しましょう．

解答

(1)　移動後の円の中心を C，円と x 軸の接点を T とすると，$\mathrm{OT}=\overset{\frown}{\mathrm{PT}}$ であるから，



C$(at,\ a)$, T$(at,\ 0)$ となる．このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\left(a\cos\left(\frac{3}{2}\pi-t\right),\ \ a\sin\left(\frac{3}{2}\pi-t\right)\right)$$
$$=(-a\sin t,\ -a\cos t)$$

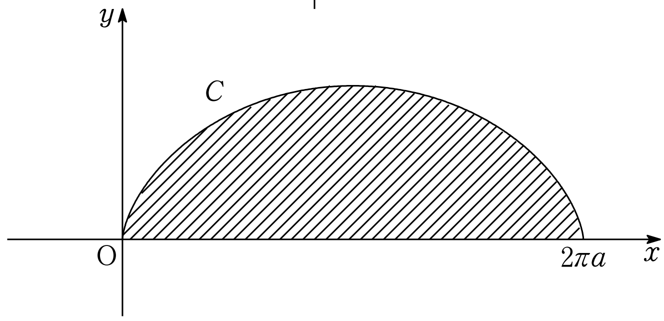
であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}$$
$$=(at-a\sin t,\ a-a\cos t)$$

となる．したがって，

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{at-a\sin t,\ a-a\cos t})\cdots\cdots(\text{答})$$

である．



(2)　求める面積を S とすると，

$$S=\int_0^{2\pi a} y\,dx$$

である．(1) より，$x=at-a\sin t$ であるから，$dx=(a-a\cos t)dt$ であり，x と t の対応関係は，下表のようになる．また，$y=a-a\cos t$ であるから，S は次のようになる．

x	0	$\to$	$2\pi a$
t	0	$\to$	2π

$$S=\int_0^{2\pi}(a-a\cos t)(a-a\cos t)\,dt$$
$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt$$
$$=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt$$
$$=a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt$$
$$=a^2\left[\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi}=\boldsymbol{3\pi a^2}\cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　求める曲線 C の長さを L とすると，

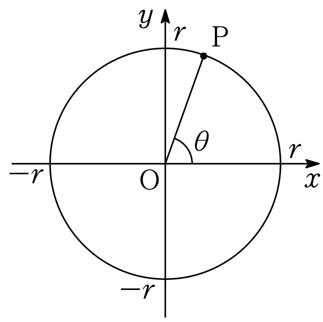
$$
\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} a\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} a\sqrt{2-2\cos t}\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} a\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}\,dt \quad \left(\because\ \ \sin\frac{t}{2} \geqq 0\right) \\
&= 2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} \\
&= 2a(2+2) = \boldsymbol{8a} \cdots\cdots (\textbf{答})
\end{aligned}
$$

である．

◇　♡

解説

頻出テーマであるサイクロイドに関する問題です．与えられた問題文を読んで，サイクロイドであることがわかった人は，この辺りの分野がよく勉強できています．(1) ができないと全滅する問題なので経験があるかないかが結果を左右したのではないでしょうか？



(1) は，ベクトルを用いるとスッキリと解答できます．ポイントは，半径 r の円周上の点 P は，円の中心を O とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ と表されることです．ここでの θ は，x 軸の正の方向とのなす角を表しています．ベクトルは，始点の位置に関係ないので，円の中心がどこにあろうがこの式は成り立ちます．これがベクトルを利用する最大の理由です．

(2) は，面積の公式を利用しますが，曲線 C が媒介変数表示されているため置換積分法を利用します．ここで，間違えてはいけないのは積分区間は積分変数と対応しているということです．面積の公式を用いると $\displaystyle\int_0^{2\pi a} y\,dx$ となりますが，この時点では積分区間は x の範囲です．置換積分をした後は，積分区間は t の範囲になりますから，$0 \leqq t \leqq 2\pi$ になります．よく見かける間違いは，積分区間と積分変数がごちゃ混ぜになって，$\displaystyle\int_0^{2\pi} y\,dx$ となっているものです．

(3) は，以下の公式を用いて計算します．

【曲線の長さの公式】

(i)　陽関数の曲線 …… 曲線 $y = f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ の長さ L は，

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

(ii)　媒介変数表示の曲線 …… 曲線 $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ $(\alpha \leqq t \leqq \beta)$ の長さ L は，

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$