26 （'12　大阪教育大） **【難易度】** … |標準|

a, b, c を自然数とするとき，次の不等式を示せ．

（1）　$2^{a+b} \geqq 2^a + 2^b$

（2）　$2^{a+b+c} \geqq 2^a + 2^b + 2^c + 2$

（3）　$2^{a+b+c} \geqq 2^{a+b} + 2^{b+c} + 2^{c+a} - 4$

【テーマ】：不等式の証明

方針

a, b, c は自然数なので，$2^a \geqq 2, 2^b \geqq 2, 2^c \geqq 2$ となります．そこで，$x = 2^a - 2$ などと置いて，x, y, z の式に変形します．

♣　♠

解答

（1）**【証明】**

a, b は自然数であるから，$x = 2^a - 2, y = 2^b - 2$ とおくと，$x \geqq 0, y \geqq 0$ である．

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= 2^a \cdot 2^b - (2^a + 2^b) \\ &= (x+2)(y+2) - (x+2+y+2) \\ &= xy + 2(x+y) + 4 - (x+y) - 4 \\ &= xy + x + y \geqq 0\end{aligned}$$

である．等号は，$a = b = 1$ のとき成立する．ゆえに，示された． **（証明終）**

（2）**【証明】**

a, b, c は自然数であるから，$x = 2^a - 2, y = 2^b - 2, z = 2^c - 2$ とおくと，$x \geqq 0, y \geqq 0, z \geqq 0$ である．

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= 2^a \cdot 2^b \cdot 2^c - (2^a + 2^b + 2^c + 2) \\ &= (x+2)(y+2)(z+2) - (x+2+y+2+z+2+2) \\ &= xyz + 2(xy+yz+zx) + 4(x+y+z) + 8 - (x+y+z) - 8 \\ &= xyz + 2(xy+yz+zx) + 3(x+y+z) \geqq 0\end{aligned}$$

である．等号は，$a = b = c = 1$ のとき成立する．ゆえに，示された． **（証明終）**

（3）**【証明】**

（2）と同様に x, y, z を定めると，

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= 2^a \cdot 2^b + 2^b \cdot 2^c + 2^c \cdot 2^a - 4 \\ &= (x+2)(y+2) + (y+2)(z+2) + (z+2)(x+2) - 4 \\ &= xy + yz + zx + 4(x+y+z) + 8\end{aligned}$$

であるから，

$$(\text{左辺}) - (\text{右辺}) = 2^a \cdot 2^b \cdot 2^c - (2^a \cdot 2^b + 2^b \cdot 2^c + 2^c \cdot 2^a - 4)$$

$$
\begin{aligned}
&= xyz + 2(xy + yz + zx) + 4(x + y + z) + 8 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - \{xy + yz + zx + 4(x + y + z) + 8\} \\
&= xyz + (xy + yz + zx) \geqq 0
\end{aligned}
$$

である．等号は，$a = b = c = 1$ のとき成立する．ゆえに，示された． **（証明終）**

解説

置き換えをせずにそのまま計算をしても示すことはできますが，$2^a \geqq 2$ のままやるよりも $x = 2^a - 2 \geqq 0$ としてやる方が 0 以上を示すためにはよいでしょう．

各小問は独立しています（前問の結果を利用しなくても解ける）が，同じ考え方で証明を進めていくため，(1)，(2) が解けなければ (3) を解くのは難しいでしょう．不等式の証明問題は，前問の結果を利用しなければ証明が困難なものも少なくないので，前問の結果を利用するという考え方を持っておくことも大切です．