9 （'12　東北大）　　　　【難易度】… やや難

平面上のベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, \vec{a}\cdot\vec{b} = -\dfrac{1}{2}$ を満たすとする．ただし，記号 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ はベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を表す．以下の問いに答えよ．

(1) 実数 p, q に対して，$\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$ とおく．このとき，次の条件

$$|\vec{c}| = 1,\quad \vec{a}\cdot\vec{c} = 0,\quad p > 0$$

を満たす実数 p, q を求めよ．

(2) 平面上のベクトル $\vec{x}$ が

$$-1 \leqq \vec{a}\cdot\vec{x} \leqq 1,\quad 1 \leqq \vec{b}\cdot\vec{x} \leqq 2$$

を満たすとき，$|\vec{x}|$ のとりうる値の範囲を求めよ．

【テーマ】：内積の計算

方針

(1) は，与えられた条件で p, q の連立方程式を立てます．(2) は，与えられた条件から $\vec{a}, \vec{b}$ を成分表示すると方針が立て易いです．

♣　　♠

解答

(1) $|\vec{c}| = 1$ より，$|\vec{c}|^2 = 1$ であるから，

$$|p\vec{a} + q\vec{b}|^2 = 1 \iff p^2|\vec{a}|^2 + 2pq\vec{a}\cdot\vec{b} + q^2|\vec{b}|^2 = 1$$

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, \vec{a}\cdot\vec{b} = -\dfrac{1}{2}$ であるから，

$$p^2 - pq + q^2 = 1 \cdots\cdots ①$$

一方，$\vec{a}\cdot\vec{c} = 0$ より，

$$\vec{a}\cdot\left(p\vec{a} + q\vec{b}\right) = 0 \iff p - \frac{1}{2}q = 0 \cdots\cdots ②$$

①, ② より，

$$\boldsymbol{p = \frac{1}{\sqrt{3}},\ q = \frac{2}{\sqrt{3}}} \cdots\cdots\textbf{(答)}$$

である．

(2) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, \vec{a}\cdot\vec{b} = -\dfrac{1}{2}$ であるから，

$$\vec{a} = (1,\ 0),\quad \vec{b} = \left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

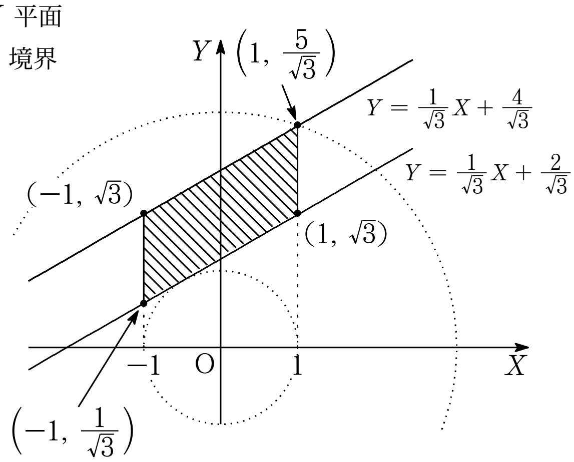
とおくことができる．$\vec{x} = (X, Y)$ とおくと，

$$\vec{a}\cdot\vec{x} = X,\quad \vec{b}\cdot\vec{x} = -\frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y$$

となるので，

$$-1 \leqq \vec{a}\cdot\vec{x} \leqq 1 \iff -1 \leqq X \leqq 1$$

$$1 \leqq \vec{b}\cdot\vec{x} \leqq 2 \iff 1 \leqq -\frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y \leqq 2$$



ゆえに，この 2 つの不等式を満たす点 (X, Y) を XY 平面に図示すると，右図の斜線部分のようになる．ただし，境界線上の点を含む．

ここで，$\left|\vec{x}\right|=r$ とすると，$\left|\vec{x}\right|^2=r^2$ であるから，

$$X^2+Y^2=r^2 \cdots\cdots ③$$

となるので，これは原点を中心とした半径 r の円を表している．この r のとり得る値の範囲を求めればよい．点 $(0, 0)$ と直線 $Y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}X+\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ の距離が r の最小値であるから，そのときの r の値は，

$$r=\frac{\left|\frac{2}{\sqrt{3}}\right|}{\sqrt{1+\frac{1}{3}}}=1$$

である．また，③ が点 $\left(1,\ \dfrac{5}{\sqrt{3}}\right)$ を通るとき，r は最大となるので，そのときの r の値は，

$$r=\sqrt{1+\frac{25}{3}}=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{21}}{3}$$

である．ゆえに，r のとり得る値の範囲は，$1 \leqq r \leqq \dfrac{2\sqrt{21}}{3}$ となるので，$\left|\vec{x}\right|$ のとり得る値の範囲は，

$$\mathbf{1} \leqq \left|\vec{\boldsymbol{x}}\right| \leqq \frac{\mathbf{2\sqrt{21}}}{\mathbf{3}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

である．

◇ ♡

解説

(1) は，与えられた条件式から p, q の方程式を導いて連立方程式を解けばよいので，方針は立てやすいでしょう．

(2) は，どのような方針を立てればよいかで悩むかもしれませんが，$\vec{a}, \vec{b}$ に関する条件が与えられているので，これを用いて $\vec{a}, \vec{b}$ の成分が決定できれば，領域図示の問題に持ち込めます．ポイントは，$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$ という条件から半径 1 の円を考えて，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$ という条件から $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が $\dfrac{2}{3}\pi$ であることに気付くことです．そうすれば成分表示ができるので，$\vec{x}$ も成分表示をして解答のように領域の問題にすればよいのです．